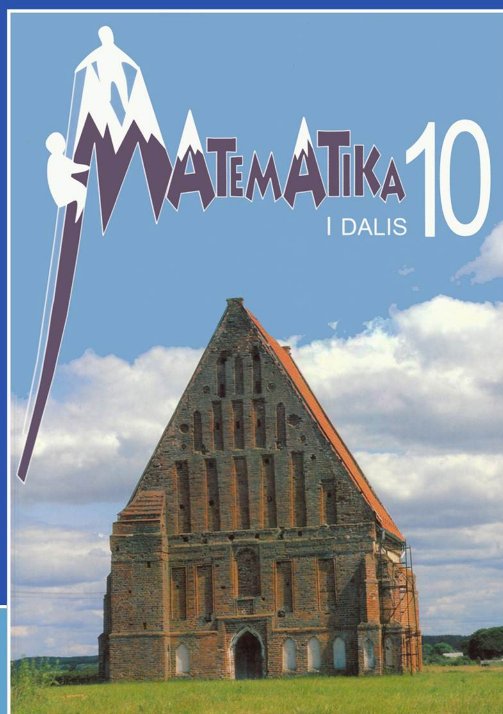
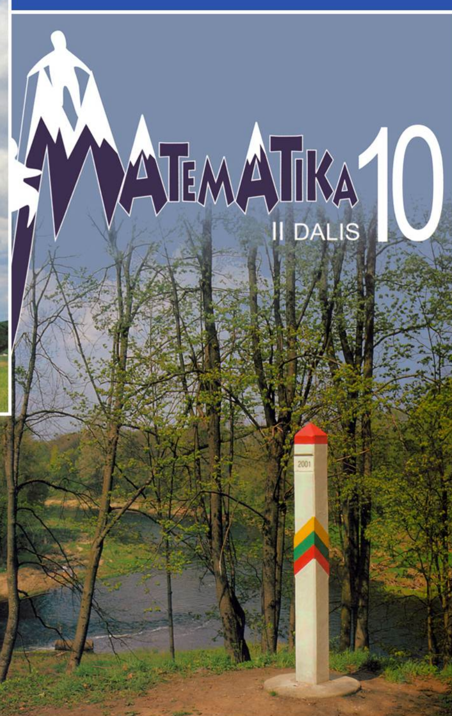
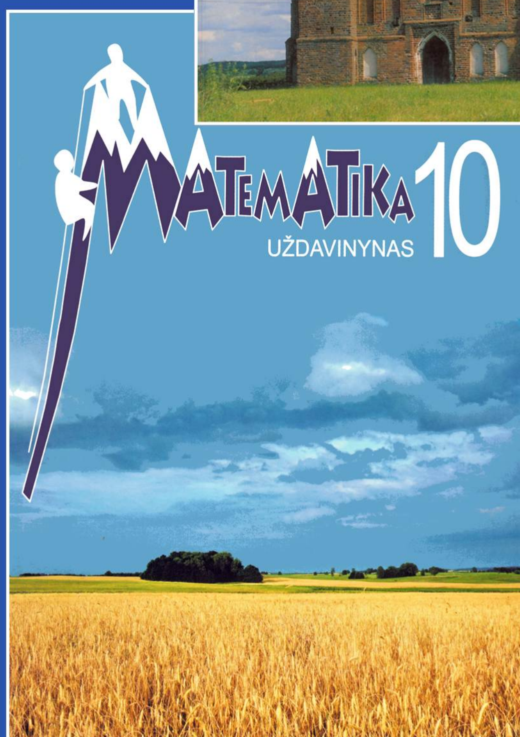
MATEMATIKA 10

MOKYTOJO KNYGA







MATEMATIKA 10

MOKYTOJO KNYGA

TEV

VILNIUS 2002

UDK 372.851
Ma615

Darbo vadovas *Valdas Vanagas*

Redaktoriai: *Juozas Mačys, Žydrūnė Stundžienė*

Programinė įranga: *Tadeuš Šeibak*

Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė*

Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas: *Nijolė Drazdauskienė*

Kalbos redaktorė *Diana Gustienė*

Konsultantai: *Marytė Stričkienė, Elmundas Žalys*

Recenzavo Matematikos ir informatikos institutas

2002 08 27. 20 sp. l. Užs. Nr. 25
Leidykla TEV, Akademijos g. 4, LT-2021 Vilnius
Spausdino UAB „Logotipas" spaustuvė,
Žalgirio g. 108, LT-2005 Vilnius

Leidyklos TEV interneto svetainė www.tev.lt

ISBN 9955-491-26-4

TURINYS

ĮVADAS

PAGRINDINĖ DALIS

Gerbiami mokytojai,

Leidykla TEV toliau tęsia komplektinių matematikos priemonių leidimą. Ši knyga yra to paties leidykloje susibūrusio kolektyvo, parašiusio vadovėlį „Matematika 10, I ir II dalys“ ir su juo suderintą uždavinyną, darbo tęsinys.

Šią mokytojo knygą rašė pedagogai: Irena Bagdonienė, Jolanta Knyvienė, Kazimieras Pulmonas, Juozas Šinkūnas ir Valdas Vanagas.

Gavę teigiamų atsiliepimų apie komplektines mokymo priemones „Matematika 7“ (ji Švietimo ir mokslo ministerijos pripažinta geriausia 1999 metų mokymo priemone), „Matematika 8“ ir „Matematika 9“, tikimės, kad ir „Matematika 10“ susilauks palankaus įvertinimo.

Laukiame jūsų atsiliepimų tiek apie visą komplektą, tiek apie šią mokytojo knygą.

Rašykite adresu: Leidykla TEV, Akademijos g. 4, LT-2021 Vilnius.

LEIDĖJAI

PRATARMĖ

Šios mokytojo knygos struktūra tokia, kaip 9 klasės mokytojo knygos. Kaip ir toje mokytojo knygoje, taip ir šioje, aptarus kiekvieno *skyriaus* ypatumus, pateikiami tame skyriuje vadovėlio autorių keliami tikslai mokinių žinioms. Tikslai suskirstyti lygmenimis: minimaliuoju, pagrindiniu ir aukštesniuoju. Tai mokytojams turėtų palengvinti planuoti darbą, atsirinkti, kas yra svarbiausia, padėti diferencijuoti mokymo procesą pirminiame profiliavimosi etape.

Manome, kad minimaliuoju lygmeniu nusakytus reikalavimus ir tikslus turi įveikti visi, net ir silpniausi mokiniai; būsimiems humanitarams (vidurinėje mokykloje planuojantiems matematikos mokytis bendruoju kursu) orientyras galėtų būti minimaliuoju ir pagrindiniu lygmeniu įvardyti tikslai; būsimiems realinės pakraipos (vidurinėje mokykloje planuojantiems matematikos mokytis išplėstiniu kursu) moksleiviams orientuotis reikėtų ir į aukštesniuoju lygmeniu nurodytus reikalavimus ir tikslus.

Dėstant naują medžiagą reikėtų padėti mokiniams išvengti mechaniško kalimo ir siekti, kad mokiniai suprastų esminius dalykus, mokėtų paaiškinti, *kodėl* yra taip ar kitaip. Reikia siekti, kad mokiniai sugebėtų įprastinius sakinius užrašyti matematine (simbolių) kalba, taip pat ir atvirkščiai — matematines išraiškas, brėžinius, lygčių sprendimą persakyti žodžiais. Būtina mokinius pratinti analizuoti sąlygą, prognozuoti, tikrinti atsakymą, daryti išvadas ir apibendrinimus, uždavinio sprendimą skirstyti etapais.

Mokytojui nebūtina laikytis vadovėlio metodinio stiliaus — svarbiausia, kad mokiniai teisingai suvoktų esminius momentus ir mokėtų naudotis išeita medžiaga spręsdami konkrečius uždavinius.

Vadovėlyje „Matematika 10“ yra 9 skyriai ir medžiaga, skirta pagrindinės mokyklos matematikos kursui pakartoti. Kiekvienas skyrius padalytas į skyrelius. Kiekviename jų pateikiama teorinė medžiaga ir uždaviniai. Teorinė medžiaga duodama siekiant pakartoti jau žinomus dalykus ir juos praplečiant iki dar nežinomų, bet programoje numatytų matematinių tiesų. Pilkajame fone pateikta neprivaloma teorinė medžiaga, skirta temai pagilinti. Neprivalomą medžiagą patartina nagrinėti tik su stipresniais mokiniais ir su tais, kurie planuoja vidurinėje mokykloje matematikos mokytis išplėstiniu kursu. (Neprivalomą teorinę medžiagą atitinkantys uždaviniai vadovėlyje yra nuspalvinti, o uždavinyne — pabraukti.) Teorinė vadovėlio medžiaga yra gana plati, todėl ją gali skaityti ir suprasti patys mokiniai. Mokytojui reikėtų skatinti mokinius dirbti su vadovėliu savarankiškai, t. y. skaityti teoriją, ieškoti atsakymų į klausimus ir patiems juos kelti. (Vadovėlio teorinėje dalyje yra daug klausimų ir užduočių, kuriuos turėtų atlikti mokiniai.) Apie du trečdalius kiekvieno skyrelio pirmųjų pratimų ir uždavinių yra skiriama einamai teorinei medžiagai mokyti, o likę — praeitai medžiagai gilinti, plėtoti ir kartoti. Sunkesnių uždavinių numeriai pažymėti žvaigždute. Mokytojas neprivalo reikalauti išspręsti visus uždavinius. Kiekvieno skyriaus gale yra skyrelis „Pasitikrinkite“. Jo uždavinius mokiniai turėtų mokėti išspręsti savarankiškai. Ruošdami kontrolinius darbus mokytojai gali juo remtis kaip tam tikru standartu. Tiek mokytojams, tiek mokiniams pravers uždavinynas, kuriame yra daugiau kaip 550 uždavinių, atitinkančių vadovėlio turinį.

Šioje, kaip ir ankstesnėse mokytojo knygose, buvo stengtasi per daug nenurodinėti, kaip mokyti vaikus, kaip planuoti pamoką ir pan. Taip pat čia nerasite plačių didaktinių apibendrinimų ar gilių metodologinių samprotavimų. Autorių tikslas buvo koncentruotai ir trumpai suformuluoti dėstomos medžiagos esmę akcentuojant matematinę kurso pusę. Patyrusiems mokytojams gali pasirodyti, kad kai kurie paaiškinimai per daug detalūs, bet jiems neturėtų būti sunku atsirinkti tai, kas svarbiausia.

Dėstydamas matematiką 10 klasėje, mokytojas turi būti susipažinęs su pagrindinės mokyklos matematinio išsilavinimo standartais, pagrindinės ir vidurinės mokyklos (5–12 klasių) matematikos programomis.

Mokytojams, anksčiau nedirbusiems su naująja programa, reikėtų susipažinti su pagal ją parašytais 5 ir 6 klasių matematikos vadovėliais „Matematika ir pasaulis“ bei 7, 8 ir 9 klasių vadovėliais „Matematika 7“, „Matematika 8“ ir „Matematika 9“.

Šioje mokytojo knygoje spausdiname pagrindinės mokyklos programą, pagal kurią buvo rašomi naujieji vadovėliai. Šią programą pateikiame *vienoje* lentelėje. Taip surašyta programa patogu naudotis, nes iškart matoma 5–10 klasių bazinio matematikos kurso pagrindinių skyrių visuma.

Klasė	5 kl.	6 kl.	7 kl.	8 kl.	9 kl.	10 kl.
1. Problemų sprendimas	Uždavinių, susietų su mokinių aplinka ir mokykloje mokomais dalykais, sprendimas: mokyti identifikuoti ir gauti informaciją, reikalingą problemai spręsti; pratinti aiškinti įvairias gyvenimiškas situacijas matematiškai; mokyti argumentuoti sprendimą.	Uždavinių, susietų su mokinių aplinka ir mokykloje mokomais dalykais, sprendimas: mokyti aprašyti įvairias situacijas matematine kalba naudojant simbolius ir diagramas; mokyti bent iš dalies pagrįsti uždavinių ir problemų sprendimus; pratinti apibendrinti; formuluoti paprastas hipotezes.	Uždavinių, susietų su mokomaisiais dalykais ir įvairiomis gyvenimo sritimis, sprendimas, tinkamų priemonių ir matematinių metodų užduotims atlikti pasirinkimas, kritiškas informacijos vertinimas, planingas darbas, argumentavimas: mokyti suskaidyti užduotį į smulkesnes, lengviau įveikiamas dalis; mokyti naudoti įvairių formų matematinę informaciją; pratinti daryti apibendrinimus ir juos tikrinti.	Uždavinių, susietų su mokomaisiais dalykais ir įvairiomis visuomenės gyvenimo sritimis, sprendimas, užduoties skaidymas, informacijos tikrinimas, trūkstamos informacijos paieška, „bandymų ir klaidų“ metodo naudojimas: mokyti mokinius kelti prasmingus (duotame kontekste) klausimus ir problemas; pratinti kritiškai vertinti informacijos pateikimą; pratinti daryti pagrįstus apibendrinimus; mokyti argumentuoti.	Praktinių ir teorinių problemų sprendimas, naujų sprendimo būdų paieška ir alternatyvių matematinių metodų naudojimas, užduoties skaidymas, metodiškas darbas ir kritiškas informacijos naudojimas, nuoseklus matematinis mąstymas: mokyti įveikti sprendimo sunkumus keičiant sprendimo būdą; mokyti konstruktyviai nagrinėti modelius ir sprendimus; mokyti argumentuoti; pratinti mokinius pastebėti nelogiškumus.	Praktinių ir teorinių problemų sprendimas, matematinių užduočių skaidymas ir apibendrinimas, detalaus darbo plano parengimas ir įvykdymas, informacijos ir rezultatų tikrinimas, naujų objektų apibrėžimas, teiginių įrodymas ir paneigimas, kontrpavyzdžių naudojimas, loginių samprotavimų grandinių (pvz., naudojant „jei..., tai...“ pavidalo sakinius) konstravimas: mokyti mokinius aiškinti darbo eigą argumentuojant galimus pasirinkimus, pabrėžti kontrpavyzdžių svarbą paneigiant apibendrinimus ar hipotezes.
2.1. Skaičiai	Skaičiai nuo nulio iki milijono, dešimtainių trupmenų tvarka, paprastųjų trupmenų tvarka, paprastųjų trupmenų ir dešimtainių trupmenų sąryšis: mokyti perskaityti ir užrašyti skaičius bei grupuoti didelių skaičių skaitmenis; mokyti palyginti trupmenas; mokyti versti paprastąsias trupmenas dešimtainėmis ir dešimtaines paprastosiomis.	Pirminiai ir sudėtiniai skaičiai; paprasčiausi skaičių dalumo požymiai; tiegiamieji ir neigiamieji skaičiai, skaičiaus modulio ir skaičių bendro kartotinio sąvokos: mokyti konkrečiuose sąryšiuose naudoti neigiamuosius skaičius.	Skaičiaus sąvokos apžvalga (lyginiai, nelyginiai, pirminiai ir sudėtiniai skaičiai, dešimtainės trupmenos ir jų apvalinimas, teigiamieji ir neigiamieji skaičiai, natūralieji, sveikieji, racionalieji ir iracionalieji, realieji skaičiai): sistemingiau supažindinti mokinius su pirminiais ir sudėtiniais skaičiais, bendrais dalikliais ir kartotiniais; supažindinti juos su skaičių tiesės struktūra ir skaičių tvarka, skaičiaus modulio sąvoka; mokyti apvalinti ir priartinti skaičius.	Su skaičių tiese susijusių sąvokų įtvirtinimas ir įprasminimas.		
2.2. Skaičiavimai	Paprasčiausių dešimtainių trupmenų daugyba ir dalyba, trupmenų sudėtis ir atimtis, trupmenos ir natūraliojo skaičiaus dauginimas, paprasčiausi skaitmeniniai reiškiniai, veiksmų tvarka, skliaustai; mintinas skaičiavimas akcentuojant išankstinį daugybos rezultato vertinimą: toliau mokyti daugybos ir dalybos savybių ir jų pritaikymo; siekti, kad mokiniai lengvai dagintų ir dalytų iš vienaženklio skaičiaus, suprastų veiksmų su daugiaženkliais skaičiais algoritmus; supažindinti su paprasčiausių trupmenų sudėtimi, atimtimi ir dauginimu iš natūraliųjų skaičių; mokyti apskaičiuoti skaitmeninius reiškinius.	Keturi aritmetiniai veiksmai su nesudėtingomis dešimtainėmis trupmenomis, trupmenų sudėtis ir atimtis, trupmenų dauginimas iš natūraliųjų skaičių, dalyba iš dviženklio ir triženklio daliklio, mintinas skaičiavimas, orientuotas į visų aritmetinių veiksmų rezultatų išankstinį vertinimą: sisteminti moksleivių žinias apie aritmetinius veiksmus bei jų savybes ir mokyti juos tuos veiksmus teisingai panaudoti bei interpretuoti; mokyti prastinti ir neformaliai bendravardiklinti trupmenas; siekti, kad moksleiviai lengvai dalytų iš dviženklio skaičiaus be skaičiuoklio.	Aritmetinių veiksmų su natūraliaisiais skaičiais, nuliu ir nesudėtingomis dešimtainėmis trupmenomis įgūdžių įtvirtinimas, aritmetiniai veiksmai su trupmenomis, skaičiavimai su skaičiumi π, veiksmai su neigiamaisiais skaičiais, įvadas į realiųjų skaičių aritmetiką, dešimties laipsniai, kėlimas kvadratu ir kvadratinės šaknies traukimas: ruošti mokinius skaičiavimams realiųjų skaičių aibėje; supažindinti su apytiksliu skaičiavimu; mokyti naudoti skaičiuoklius.	Aritmetiniai veiksmai realiųjų skaičių aibėje, kėlimas sveikuoju laipsniu, kvadratinės šaknies traukimas, apytikslis skaičiavimas, išankstinis rezultato įvertinimas, skaičiavimas skaičiuokliu: formuoti ir įtvirtinti skaičiavimo įgūdžius.		Apytikslis skaičiavimas; išankstinis rezultato įvertinimas; skaičiavimas skaičiuokliu.

Klasė	5 kl.	6 kl.	7 kl.	8 kl.	9 kl.	10 kl.
2.3. Procentai	Procento sąvoka: apibrėžti procentą kaip šimtąją dalį; mokyti spręsti paprasčiausius uždavinius.	Procentų skaičiavimas: mokyti spręsti paprasčiausius uždavinius, supažindinti su atvirkštiniu procentų uždaviniu.	Procentų ir paprastųjų bei dešimtainių trupmenų sąryšis, veiksmai su procentais, promilės (tūkstantosios): mokyti spręsti tiesioginius ir paprasčiausius atvirkštinius procentų uždavinius.	2–3 žingsnių procentų uždaviniai.	Paprastieji procentai. Pastoviųjų palūkanų paskolos.	Sudėtiniai procentai. Kintamųjų palūkanų paskolos.
3. Matai ir matavimai	Tolesnis praktikavimasis versti ilgio, ploto, masės ir tūrio vienetus; laiko skaičiavimai, susieti su laikrodžiu ir kalendoriumi; užsieniniai pinigai; įvadas į mastelį.	Tolesnis praktikavimasis su matavimo vienetais, tūrio skaičiavimas, sąryšis tarp dm^3 ir litrų, įvadas į išvestinius matavimo vienetus.	Įvairūs ilgio, kampo dydžio, ploto ir tūrio matavimo ir skaičiavimo uždaviniai. Uždaviniai su išvestiniais matavimo vienetais.	Uždaviniai su ilgio, ploto, tūrio, masės ir tankio matavimo vienetais; uždaviniai su masteliu (žemėlapiai, darbo brėžiniai, modeliai); matavimai ir matavimo paklaidos; reikšminiai skaitmenys; įvairių matavimo vienetų palyginimas.	Uždaviniai su masės ir tankio vienetais, matavimo tikslumo nustatymas, matavimo prietaisų matavimo tikslumas; reikšminiai skaitmenys; matavimo vienetų palyginimas; pažintis su SI matų sistema.	Tolesnis uždavinių su matavimo vienetais ir matavimo tikslumu sprendimas (skyriaus sisteminimas).
4. Geometrija	Apskritimas, spindulys, skersmuo; supažindinimas su fundamentaliomis geometrijos sąvokomis — tašku, atkarpa, tiese, kreive, spinduliu, kampu; stačiakampio, kvadrato, trikampio ir apskritimo braižymas. Stačiojo trikampio plotas.	Skritulys, apskritimas, apskritimo ilgis ir skritulio plotas; supažindinimas su trimatėmis figūromis: stačiąja prizme, ritiniu. Trikampio ir lygiagretainio plotai.	Kampo, pusiaukampinės, statmens, lygiagretės piešimas, brėžimas ir konstravimas; trikampio ir keturkampio perimetras ir plotas; užduotys su trikampiais, keturkampiais ir apskritimais; lygiagretainis; trapecija; geometrinio teiginio samprata, teoremos apie trikampio ir keturkampio kampus.	Sudėtingesnės brėžimo ir konstravimo užduotys; įvadas į panašumą ir mastelį; simetrija (atspindys tiesės atžvilgiu, atspindys taško atžvilgiu); figūrų didinimas ir mažinimas. Stačiosios prizmės ir ritinio tūris. Pitagoro teorema.	Apskritimo geometrija: stygos, liestinės, išpjovos sąvokos, išpjovos ir nuopjovos plotas; panašumas ir mastelis (trikampių panašumas, žemėlapiai ir darbo brėžiniai); taisyklingieji daugiakampiai. Rutulio, piramidės ir kūgio tūrių ir paviršių plotų formulės.	Trigonometriniai santykiai: smailiojo kampo sinusas, kosinusas ir tangentas; kampų nuo 0° iki 180° trigonometrinės funkcijos; formulė $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ir paprasčiausi trigonometriniai sąryšiai; sinusų ir kosinusų teoremos; trigonometrijos naudojimas figūrų plotams skaičiuoti. Nupjautinės piramidės ir nupjautinio kūgio tūris.
5. Algebra	Paprasčiausių lygčių ir nelygybių sudarymas ir sprendimas; paprasčiausi algebriniai reiškiniai ir formulės (paprasti pratimai su raidėmis, kaip simboliais, žyminčiais skaičius, ir raidžių keitimas skaičiais), veiksmų tvarka, skliaustai.	Lygčių, nelygybių, reiškinių ir formulių įtvirtinimas.	Reiškinių su skliaustais pertvarkymas ir prastinimas; reiškinių reikšmių skaičiavimas pakeičiant raides skaičiais; tiesinės lygtys su vienu nežinomuoju.	Reiškinių pertvarkymas taikant formules $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Tiesinių lygčių su vienu nežinomuoju sudarymas ir sprendimas; tiesinės nelygybės.	Tiesinių lygčių sistemų su dviem nežinomaisiais sudarymas ir sprendimas akcentuojant grafinį metodą; kvadratinių lygčių sprendimas algebriniu, grafiniu arba artutiniu būdais, bei išskiriant pilnąjį kvadratą.	Kvadratinės nelygybės; paprasčiausios lygčių sistemos su viena netiesine lygtimi.

Klasė	5 kl.	6 kl.	7 kl.	8 kl.	9 kl.	10 kl.
6. Sąryšiai ir funkcijos	Dėsningumo ir funkcijos sąvokų propedeutika. Nagrinėjant įvairius uždavinius ir pavyzdžius akcentuoti egzistuojančius dėsningumus ir sąryšius.	Įvadas į funkcijos sąvoką per praktinius pavyzdžius; plokštumos koordinačių sistema, pirmasis kvadrantas, grafinis sąryšių vaizdavimas.	Funkcijos ir jos grafiko sąvokų formavimas.	Funkcijos ir jos grafiko sąvokų formavimas; plokštumos koordinačių sistema; kintamojo sąvoka; tiesioginis ir atvirkštinis proporcingumas.	Grafinis funkcijos vaizdavimas; funkcija $y = kx$; funkcija $y = k/x$; tiesinė funkcija; kvadratinė funkcija ir jos grafikas.	Funkcijų $y = ax^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$ grafikai. Funkcijos $y = \lvert f(x) \rvert$ grafiko ypatumai.
7. Statistika	Duomenų rinkimas; stulpelinės diagramos ir histogramos; duomenų interpretavimo pratimai; įvykių tikėtinumo palyginimas („labiau tikėtinas“, „mažiau tikėtinas“ ir pan.).	Duomenų rinkimas ir klasifikavimas; praktikavimasis aiškinant sugrupuotų duomenų lenteles ir diagramas; nesudėtingi vidurkio skaičiavimo atvejai; visų galimų eksperimento baigčių išvardijimo pratimai.	Eksperimento planavimas ir atlikimas, duomenų rinkimas, sisteminimas ir grafinis iliustravimas; skritulinė diagrama.	Sudėtingesnių eksperimentų planavimas, atlikimas ir įvairus grafinis pateikimas; dažnumai ir dažnumų lentelės; vidurkių skaičiavimas; medianos sąvoka; duomenų interpretavimas; statistinės medžiagos vertinimas; įvadas į tikimybės sąvoką per praktinius eksperimentus; subjektyvaus atskirų įvykių tikimybių vertinimo ir tokio vertinimo argumentavimo pratimai.	Eksperimentų planavimo ir atlikimo pratimai; koreliacijos idėjos samprata ir panaudojimas; prognozavimo samprata; lygiai galimi įvykiai; klasikinis tikimybės apibrėžimas; pagrindinės tikimybės savybės; kombinatorinė daugybos taisyklė.	Eksperimentų planavimo ir atlikimo pratimai; kombinatorikos elementai (kėliniai, gretiniai, deriniai — be formulių); nepriklausomi įvykiai; matematinė viltis.
8. Ekonomikos elementai	Taupymas ir paskolos, metiniai procentai; uždaviniai, susieti su darbine veikla arba pramogomis.	Pirkimas ir pardavimas, pelnas ir nuostoliai, nuolaida.	Darbo užmokesčio skaičiavimas, taupymas ir indėliai. Pajamų ir socialinio draudimo mokesčiai. Užsienio ir nacionalinės valiutų kursai.	Asmeninė apskaita ir šeimos biudžetas (pajamos, išlaidos, namų ūkio apskaita). Uždaviniai, susieti su gamyba ir prekių mainais (savikaina, antkainis, pajamos, pelnas, nuostolis, nuolaida).	Paskolos; susipažinimas su vertybiniais popieriais (obligacijos, akcijos, vekseliai); pirkimas išsimokėtinai; pridėtosios vertės ir pelno mokesčiai; uždaviniai, susieti su gamyba ir prekių mainais; verslo atsiperkamumas.	Įvairios draudimo formos; mokesčiai (akcizas, netiesioginiai mokesčiai); nacionalinio ir asmeninio biudžetų tarpusavio ryšiai.
9. Informatikos elementai	Algoritmo sąvokos propedeutika. Nagrinėjant uždavinių sprendimo būdus mokyti nusakyti sprendimo eigą įprastine kalba.	Žodinis ir algebrinis algoritmų aprašymas: nagrinėjant kitų mokomųjų matematikos skyrių uždavinių sprendimo būdus mokyti nusakyti sprendimo eigą įprastine kalba.	Nesudėtingų užduočių atlikimo algoritmų, realizuojamų naudojant skaičiuoklius, išreiškimas įprastine kalba arba skaičiuoklio klavišų simbolių seka.	Duomenys ir informacija; paprasčiausios duomenų bazės, reikiamų duomenų radimas jose; informacijos iš duomenų bazių interpretavimas ir panaudojimas paprasčiausioms užduotims iš kitų mokomųjų skyrių atlikti; algoritmo sąvoka ir pavyzdžiai (aprašymai, vartotojo instrukcijos, formulės); algoritmai plotams skaičiuoti, lygtims spręsti ir t. t.; algoritmų blokinės schemos.	Sudėtingesni algoritmai, blokinės schemos; paprasčiausi artutiniai lygčių sprendimo metodai.	Sudėtingesni algoritmai ir jų blokinės schemos; modeliavimo pavyzdžiai.

MATEMATIKOS VADOVĖLIO 10 KLASEI TURINYS

Vadovėlis susideda iš dviejų dalių. Pirmoje vadovėlio dalyje yra svarbiausia medžiaga, kurią reikia mokyti 10-oje klasėje. Antroje dalyje yra stereometrijai skirtas skyrius, tyrimo uždavinių skyrius ir pagrindinės mokyklos kurso kartojimo medžiaga.

Pastabos.

1. Stereometrija (8 skyrius) nebuvo numatyta nagrinėti pagrindinėje mokykloje (žr. programą 8 p.), bet galvojant, kad 11–12 klasėje gali pritrūkti laiko, nutarta dalį stereometrijos kurso nagrinėti jau 10 klasėje.

2. Tyrimo uždavinius (9 skyrius) rekomenduojama spręsti visais mokslo metais.

Kad lengviau būtų planuoti darbą, pateikiame vadovėlio turinį nurodydami *orientacinį minimalų* skaičių pamokų kiekvienai *privalomai* temai įsisavinti. Šis skaičius nurodytas skliausteliuose šalia kiekvienos dalies, skyriaus ir privalomojo skyrelio pavadinimų. (Suprantama, nurodytą pamokų skaičių galima keisti savo nuožiūra.) Kurso planas pateiktas 144 metinėms (4 savaitinėms) pamokoms.

Pastaba. Į rekomenduojamą minimalų pamokų *skyriui* nagrinėti skaičių įeina viena papildoma pamoka, kuri gali būti skirta skyriui pakartoti, kontroliniam darbui.

I dalis (68)

II dalis (76)

1, **2**, **3**, **4** skyriai yra algebros, **6**, **7**, **8** — geometrijos, **5** — kombinatorikos ir tikimybių teorijos.

Iš algebros svarbiausia gebėti:

- spręsti uždavinius, susijusius su sudėtiniais procentais;
- braižyti funkcijų $y = ax^3 (a \neq 0)$, $y = \sqrt{x}$, $y = |f(x)|$ grafikus;
- spręsti lygčių sistemas, kai viena lygtis yra netiesinė;
- spręsti kvadratines nelygybes.

Iš geometrijos svarbiausia gebėti:

- stačiajame trikampyje rasti jo smailiųjų kampų sinusus, kosinusus ir tangentus, kai žinomos trikampio kraštinės;
- apskaičiuoti stačiojo trikampio elementus, kai duoti du jo elementai (spręsti stačiuosius trikampius);
- apibūdinti kampų nuo 0° iki 180° trigonometrines funkcijas: sinusą, kosinusą, tangentą;
- remtis formulėmis $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, prastinant paprasčiausius trigonometrinius reiškinius;
- remtis sinusų ir kosinusų teoremomis sprendžiant paprasčiausius uždavinius;
- sprendžiant uždavinius remtis trikampio ir lygiagretainio plotų trigonometrinėmis formulėmis;
- spręsti bet kokius trikampius;
- nusakyti stereometrijos aksiomas;
- nurodyti kampą tarp: prasilenkiančių tiesių, tiesės ir plokštumos, dviejų plokštumų.

Iš kombinatorikos svarbiausia gebėti:

- rasti rinkinių skaičių (kėliniai, gretiniai, deriniai), nesiremiant formulėmis.

Įvadiniai skyreliai skirti padėti mokiniams įsijungti į mokymosi procesą po vasaros atostogų, prisiminti tai, ko buvo mokoma anksčiau.

Pastaba. 9 klasės kurso pabaigoje buvo mokoma spręsti paprastųjų procentų uždavinius (žr. Matematika 9, II dalis, 10 skyrius). Pirmasis 10 klasės vadovėlio skyrius taip pat skirtas mokyti spręsti procentų uždavinius. Tik čia jau nagrinėjami sudėtiniai procentai. Sudėtinių procentų mokoma sprendžiant realiame gyvenime iškylančius ekonominio pobūdžio uždavinius.

Įvadiniai šio vadovėlio skyreliai taip pat siejasi su ekonomikos klausimais. Šie skyreliai, galima sakyti, yra praeitų metų ekonomikos skyriaus tęsinys. Skyreliuose pateikiami uždaviniai susiję su paprastaisiais procentais. Todėl nagrinėjant šiuos skyrelius yra gera proga prisiminti:

- paprastųjų procentų skaičiavimą;
- proporciją;
- tiesinių lygčių sprendimą.

Pastaba. Jeigu praeitais mokslo metais dėl kokių nors priežasčių nebuvo nagrinėtas (ar neišsamiai išnagrinėtas) minėtas ekonomikos skyrius, tai galima jį nagrinėti prieš einant pirmąjį šio vadovėlio skyrių.

NACIONALINIS BIUDŽETAS

8 klasėje buvo supažindinama su biudžeto sąvoka (žr. Matematika 8, I dalis, p. 8–10). Ten buvo nagrinėjamas šeimos biudžeto pavyzdys. Buvo įvestos sąvokos *subalansuotas, deficitinis* ir *perteklinis* biudžetas. Aišku, ne visi žmonės ar šeimos sudarinėja biudžetus. Bet kiekvienos valstybės vyriausybės kiekvieniems metams parengia šalies biudžetą, vadinamąjį nacionalinį biudžetą. Nacionalinis biudžetas rengiamas iš anksto, paprastai einamųjų metų II pusmetį, sekantiems kalendoriniams metams. Vyriausybė biudžete numato ir planuoja tų metų *pajamas* bei *išlaidas*. Beje, dažnai pasitaiko, kad yra planuojamas ir deficitinis biudžetas, t. y. valstybė iš anksto planuoja, kad tų metų išlaidos viršys pajamas. Tai reiškia, kad valstybė tais metais gyvens skolon. Atskirais atvejais, jeigu atsiranda papildomų pajamų, biudžeto išlaidos yra koreguojamos. Suprantama, kad visada geriau, kai gaunami geresni rezultatai, negu buvo planuoti. Vadovėlyje pateiktas Lietuvos Respublikos 1999 metų nacionalinis biudžetas (įvykdytas). Deja, jis — deficitinis. Šį biudžetą siūloma nagrinėti atliekant užduotį (patartume tai daryti klasėje) ir sprendžiant 1, 2, 6 ir 7 pratimus (juos galima pateikti ir namų darbams).

Pastaba. Lentelėje yra korektūros klaida. Mokestinių pajamų, pelno ir kapitalo mokesčių skirsnyje turi būti „fizinių asmenų *pajamų* mokestis“, o ne „fizinių asmenų *pelno* mokestis“.

Gerai būtų, kad mokytojai kartu su mokiniais panagrinėtų ir praeitų metų ar kelerių metų Lietuvos nacionalinius biudžetus, palygintų juos (žr., pvz., 2000 metų nacionalinį biudžetą, 1 lentelė).

Mokytojui reikėtų žinoti, kad nacionalinį biudžetą sudaro valstybės ir savivaldybių biudžetų visuma. To gera iliustracija yra „Matematika 10“ uždavinyno įžanginio skyriaus „Biudžetas. Mokesčiai. Draudimas“ 4 ir 5 uždaviniai.

Be to, įžvalgesni mokiniai, nagrinėdami nacionalinio biudžeto lentelės mokestines pajamas, gali paklausti, o kur dingo SODROS mokestis. Mokytojas turėtų žinoti, kad, be nacionalinio biudžeto, kaip valstybės ir savivaldybių biudžetų visumos, yra dar Valstybinio socialinio draudimo fondo biudžetas (2 lentelė) ir Privalomojo sveikatos draudimo fondo biudžetas (3 lentelė). Jų pajamas sudaro įplaukos iš mokesčių, kuriuos moka ne tik fiziniai (2002 metais — 3% nuo apskaičiuoto atlyginimo), bet ir juridiniai (2002 metais — 31% nuo apskaičiuoto atlyginimo) asmenys. Valstybinio socialinio draudimo fondo biudžeto išlaidas sudaro daugiausia socialinio draudimo išmokos: pensijos, ligos ir motinystės (tėvystės) draudimas, laidojimo pašalpos ir t. t.

Pastabos. 1) Mokytojams siūloma paskaityti „Matematika 8. Mokytojo knyga“, p. 23, kur kalbama apie biudžeto sudarymo principus.

2) Lentelės sudarytos remiantis Statistikos departamento prie Lietuvos Respublikos vyriausybės leidinio „Valstybės ir savivaldybių institucijų finansai 1999, 2000“ duomenimis.

1 lentelė. Lietuvos Respublikos 2000 metų nacionalinis biudžetas

	Tūkst. (Lt)		(%)
PAJAMOS	**8 723 642**		**100**
Mokestinės	**8 033 120**		92,1
Pajamų, pelno ir kapitalo mokesčiai:	2 815 953		
fizinių asmenų pajamų mokestis		2 504 272	
juridinių asmenų pelno mokestis		311 681	
Turto mokesčiai:	258 503		
žemės mokestis		20 849	
žemės nuomos mokestis		46 019	
nekilnojamojo turto mokestis		189 804	
turto dovanojimo ir paveldėjimo mokestis		1831	
Vidaus prekių ir paslaugų mokesčiai:	4 628 995		
PVM		3 419 412	
akcizai		1 209 583	
Tarptautinės prekybos ir sandorių mokesčiai	142 930		
Kiti mokesčiai	186 739		
Nemokestinės	**690 522**		7,9
IŠLAIDOS	**9 468 035**		**100**
Ekonomikai:	**1 147 822**		12,1
butų ir komunaliniam ūkiui		231 974	
kuro ir energijos tiekimo paslaugoms		86 319	
žemės ūkiui, miškininkystei, žuvininkystei, veterinarijai		589 580	
mineralinių išteklių gavybai, pramonei ir statybai		47 058	
transportui ir ryšiams		127 434	
kitai ekonominei veiklai		65 457	
Socialinei sferai:	**4 807 570**		50,8
švietimui		2 704 121	
sveikatos apsaugai		607 088	
socialinei apsaugai		1 116 316	
sveikatingumui (sportui), rekreacijai, kultūrai		380 045	
Kitoms valstybės funkcijoms:	**3 512 643**		37,1
bendrosioms valstybės paslaugoms		736 498	
krašto apsaugai		611 391	
viešajai tvarkai ir visuomenės apsaugai		932 568	
kitos išlaidos		1 232 186	
PERTEKLIUS/DEFICITAS	−744 393		

2 lentelė. Valstybinio socialinio draudimo fondo biudžetas

	1999 metai		2000 metai	
	Tūkst. Lt	%	Tūkst. Lt	%
PAJAMOS	**4 203 779**	**100**	**4 405 066**	**100**
Socialinio draudimo įmokos	4 029 432	95,8	4 284 268	97,2
Baudos ir delspinigiai	44 592	1,1	47 950	1,1
Lietuvos valstybės biudžeto asignavimai	36 600	0,9	—	—
Atgautos į ankstesnių metų išlaidas perkeltos abejotinai atgautinos sumos	23 650	0,6	30 110	0,7
Veiklos pajamos	69 505	1,6	42 738	1,0
IŠLAIDOS	**4 537 820**	**100**	**4 580 786**	**100**
Socialinio draudimo išmokos	3 891 374	85,7	3 898 283	85,1
Lėšos, pervedamos į Privalomąjį sveikatos draudimo fondo biudžetą	363 177	8,0	353 842	7,8
Neatgautinos ir abejotinai atgautinos sumos	125 848	2,8	132 977	2,9
Veiklos sąnaudos	157 421	3,5	186 211	4,1
Kitos išlaidos			9473	0,1
PERTEKLIUS/DEFICITAS	−334 041		−175 720	

3 lentelė. Privalomojo sveikatos draudimo fondo biudžetas

	1999 metai		2000 metai	
	Tūkst. Lt	%	Tūkst. Lt	%
PAJAMOS	**1 756 406**	**100**	**1 806 044**	**100**
Draudėjų privalomojo sveikatos draudimo įmokos	303 495	17,3	356 271	19,8
Atskaitymai nuo fizinių asmenų pajamų mokesčio	1 033 549	58,8	1 019 170	56,4
Ūkininkų įmokos	1688	0,1	1430	0,1
Asmenų, nepriklausančių apdraustiesiems, įmokos	227	0,0	210	0,0
Lietuvos valstybės biudžeto įmokos ir asignavimai	409 156	23,4	423 003	23,4
Institucijų, vykdančių privalomąjį sveikatos draudimą, veiklos pajamos	446	0,0	307	0,0
Savarankiškos juridinių ir fizinių asmenų įmokos	2596	0,1	2130	0,1
Kitos pajamos	5249	0,3	3523	0,2
IŠLAIDOS	**1 808 866**	**100**	**1 791 069**	**100**
Asmens sveikatos priežiūros paslaugoms apmokėti	1 361 472	75,2	1 328 314	74,2
Medikamentų ir medicinos pagalbos priemonių kompensacijos	296 592	16,4	307 408	17,2
Kompensacija donorams	4845	0,3	3703	0,2
Sanatorinio-kurortinio gydymo išlaidos	85 253	4,7	81 457	4,5
Protezavimas ir kitos medicinos priemonės	34 087	1,9	36 811	2,1
Sveikatos programoms finansuoti	10 936	0,6	18 424	1,0
Privalomąjį sveikatos draudimą vykdančioms įstaigoms išlaikyti	15 681	0,9	14 952	0,8
PERTEKLIUS/DEFICITAS	−52 460		+14 975	

Pakartoti:

kas yra biudžetas;
kada biudžetas yra subalansuotas; kada perteklinis; kada deficitinis;
skaičių apvalinimą iki nurodyto skyriaus;
skaičiaus standartinę išraišką;
absoliučiąją ir santykinę paklaidas.

Suprasti nacionalinio biudžeto struktūrą, žinoti, kokie būna valstybės biudžetai.

Šiame skyrelyje:

1. Supažindinama su nacionalinio biudžeto sąvoka.
2. Siūloma prisiminti, kada biudžetas yra subalansuotas; kada perteklinis; kada deficitinis.
3. Supažindinama su nacionalinio biudžeto struktūra.
4. Pateikiama užduotis nacionaliniam biudžetui nagrinėti.

Atsakymai į užduoties klausimus:

1. Biudžeto pajamos yra 8 983 600 tūkst. $= 8{,}9836 \cdot 10^9$ (Lt); išlaidos yra 9 108 723 tūkst. $= 9{,}108723 \cdot 10^9$ (Lt).
2. Biudžetas yra deficitinis. Jei biudžeto pajamos būtų lygios išlaidoms, tai biudžetas būtų subalansuotas.
3. Žemės mokestis sudarė $\frac{18\,795\,000 \cdot 100}{8\,983\,600\,000} \approx 0{,}209(\%)$, o kiti mokesčiai sudarė $\frac{214\,759\,000 \cdot 100}{8\,983\,600\,000} \approx 2{,}391(\%)$.
4. Didžiausią biudžeto pajamų dalį sudarė pridėtosios vertės mokestis. Jis sudarė maždaug 38,59%.
5. Išlaidos socialinei apsaugai sudarė $\approx$ 11,24%, o švietimui $\approx$ 30,60%.
6. Išlaidos butų ir komunaliniam ūkiui sudarė $\approx$ 3,0%, o viešajai tvarkai ir visuomenės apsaugai $\approx$ 10,7%.

Visi šiame skyrelyje pateikti 7 pratimai skirti nacionaliniam šalies biudžetui nagrinėti. Tačiau visi jie kartu skirti ir kai kurių matematikos temų kartojimui: skaičių apvalinimas nurodytu tikslumu (1–3); apytikslės reikšmės absoliučiosios ir santykinės paklaidų radimas (1, 2); skaičiaus užrašymas standartine išraiška (3); paprastųjų procentų skaičiavimas (4–7); stulpelinės ir skritulinės diagramų braižymas (7). 1–5

1. 9 108 723 000 Lt $\approx$ 9 109 000 000 Lt, t. y. 9 109 mln. Lt;
a) 277 000 Lt; b) $\approx$ 0,003%.

2. 8 983 600 000 Lt $\approx$ 8 980 000 000 Lt, t. y. 8 980 mln. Lt;
a) 3 600 000 Lt; b) $\approx$ 0,04%.

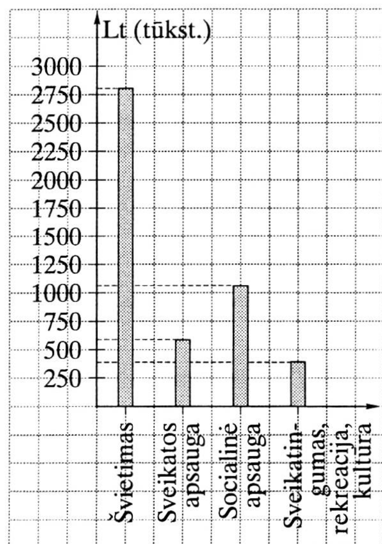
3. 5 901 808 tūkst. Lt;
a) $5{,}9018 \cdot 10^9$ Lt; b) $5{,}9 \cdot 10^9$ Lt.

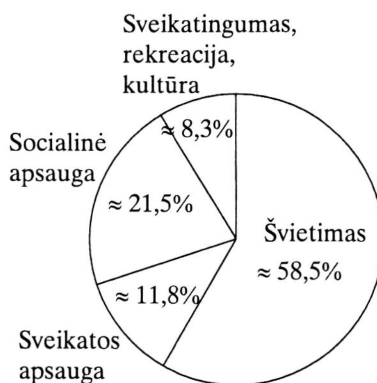
4. a) Sakykime, kad mokestinės pajamos buvo x Lt. Tada nemokestinės pajamos buvo $(x - 7\,954\,815\,000)$ Lt. Pagal sąlygą: $x + x - 7\,954\,815\,000 = 9\,377\,765\,000$, $x = 8\,666\,290\,000$ (Lt);
b) $\approx$ 92,4%.

5. a) 9 379 101 732 Lt $\approx$ 9 379 102 tūkst. Lt;
b) 712 811 732 Lt $\approx$ 712 812 tūkst. Lt.
Pastaba. Kadangi sąlygoje mokestinės pajamos pateiktos tūkstančių tikslumu, tai ieškomą duomenį taip pat tikslinga pateikti tūkstančių tikslumu (nors ir nenurodyta rezultatą apvalinti). Žinoma, nereikia laikyti klaida, jei moksleivis pateiks atsakymą nesuapvalinęs.

6. a) $\approx$ 28,7%; b) $\approx$ 4,0%; c) $\approx$ 2,0%.

7. a) $\approx$ 58,5%; b) $\approx$ 11,8%; c) $\approx$ 21,5%; d) $\approx$ 8,3%.
Pastaba. Punkto d) atsakymas pateiktas skaičiuojant išlaidas iš atitinkamos proporcijos, t. y. $\frac{395\,683 \cdot 100}{4\,769\,066} = 8{,}2968657\ldots \approx 8{,}3\,(\%)$. Tačiau d) punktą galima skaičiuoti ir taip: $100 - 58{,}5 - 11{,}8 - 21{,}5 = 8{,}2\,(\%)$. Skirtingas atsakymas (arba 8,3%, arba 8,2%) yra palyginti grubaus punktų a)–c) apvalinimo (dešimtosios tikslumu) pasekmė. Jei būtume apvalinę tiksliau, pvz., šimtosios tikslumu, atsakymai būtų tikslesni: a) $\approx$ 58,45%; b) $\approx$ 11,79%; c) $\approx$ 21,46%; d) $\approx$ 8,30%.





MOKESČIAI. AKCIZAS

Šiame skyrelyje nagrinėjamas *akcizo* mokestis. Akcizo mokestis įeina į kai kurių prekių kainas (aišku, ne į visų). Lietuvoje (2001 m.) šiuo mokesčiu apmokestinama: energetiniai resursai — dujos, benzinas, elektros energija; įvairūs kvaišalai — alkoholiniai gėrimai, tabako gaminiai, taip pat kava, kakava; erotinio pobūdžio produkcija — kai kurie kino filmai, žurnalai, laikraščiai, prabangos prekės — juvelyriniai, krištolo dirbiniai. Akcizo mokesčio dydis (tarifas) gali būti nusakomas dvejopai:

- konkrečia pinigų suma;
- apmokestinamosios vertės dalimi procentais.

Šie abu mokesčio tarifo atvejai pateikti 1 ir 2 pavyzdžiuose.

Nurodymai. 1) Pirmasis vadovėlyje pateiktas pavyzdys turėtų būti nesunkiai suvokiamas net ir patiems silpniausiems mokiniams.

2) Nagrinėjant antrąjį pavyzdį reikia siekti, kad mokiniai suprastų, nuo ko skaičiuojamas 15% akcizo mokestis. Todėl vertėtų išspręsti atvirkštinį uždavinį:

Automobilis kainuoja 67 500 Lt. *Koks yra akcizo mokestis, jei jis lygus* 15% *automobilio kainos perviršio virš* 60 000 Lt (*t. y. automobilio kainos ir* 60 000 Lt *skirtumo* 15%)?

Spręsdami šį uždavinį mokiniai įsitikins, kad akcizas bus $\frac{67\,500-60\,000}{100}\cdot 15 = 1125$ (Lt).

3) Vadovėlio pratimų ir uždavinių skyrelyje pateikiami uždaviniai susiję ne tik su akcizo mokesčiais, bet ir su kitais anksčiau nenagrinėtais mokesčiais, sudarančiais dalį nacionalinio biudžeto pajamų: nekilnojamojo turto mokesčiu (9 uždavinys), kelių mokesčiu (10 uždavinys), žemės mokesčiu (11 uždavinys), o uždavinyne: aplinkos teršimo, prekyviečių, muito ir kt. mokesčiais. Šie mokesčiai skaičiuojami analogiškai akcizo mokesčiui, t. y. konkrečia pinigų suma objekto vienetui arba apmokestinamosios vertės dalimi procentais.

4) Mokytojas turėtų paaiškinti mokiniams, kad akcizo, pridėtosios vertės, kelių mokesčiai yra netiesioginiai: jie savotiškai „paslėpti“ prekės kainoje.

Pakartoti:

paprastųjų procentų uždavinių sprendimą;
pajamų, SODROS, pelno ir pridėtosios vertės mokesčius.

Išmokti:

apskaičiuoti akcizo mokestį konkrečia pinigų suma, jei žinoma apmokestinamosios vertės dalis procentais;
apskaičiuoti prekės kainą, jei žinoma apmokestinamosios vertės dalis procentais.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

8–14 pratimai — teminiai, o kartu ir kartojimo (paprastųjų procentų skaičiavimas). 6–15

8. a) 0,3 mln. Lt; b) 0,64 mln. Lt.

9. a) 25 000 Lt; b) 17 550 Lt; c) 230 tūkst. Lt; d) 80 tūkst. Lt.

10. a) Nuo 25 Lt iki 125 Lt; b) nuo 600 Lt iki 3000 Lt;
c) nuo 38,7 Lt iki 193,5 Lt; d) nuo 2100 Lt iki 10 500 Lt.

11. a) 675 Lt; 937,5 Lt; b) 1093,5 Lt; 1625,4 Lt.

12. a) 5840 Lt; b) 12 500 Lt; c) 61 204 Lt; d) 38 376 Lt.

13. a) Viršijanti 60 000 Lt suma lygi 65 000 − 60 000 = 5000 (Lt). Kadangi akcizo mokestis sudaro 15% šios sumos, tai akcizas yra $\frac{5000\cdot 15}{100} = 750$ (Lt);
b) 1800 Lt; c) 2250 Lt; d) 3000 Lt.

14. a) 1000 Lt; b) 10 000 Lt; c) 100 000 Lt; d) 100 000 000 Lt.
Nurodymas. Pakartokite matavimo vienetų sąryšius.

DRAUDIMAS

Šiame skyrelyje nagrinėjami su draudimu susiję klausimai. (Beje, draudimo įmokos neįeina į nacionalinį biudžetą, — apie tai trumpai užsimenama praeitame skyrelyje.) Draudimo mokestis skaičiuojamas nuo draudžiamo turto vertės. Aišku, galima turtą drausti ne visa jo verte — kuo mažesnę turto vertę draudžiame, tuo mažiau reikės mokėti, bet įvykus nelaimei išmokama suma neviršija apdraustos sumos.

Apskritai mokiniams vertėtų paaiškinti, kad draudžiant turtą, sveikatą ar pan. yra pasirašoma sutartis. Paprastai į sutartį draudėjai surašo įvairiausių sąlygų, siekdami sumažinti savo riziką. Todėl patartina sutartį atidžiai perskaityti prieš ją pasirašant.

Draudimo tarifai, kaip ir akcizo tarifai, gali būti nusakomi dvejopai:

- konkrečia pinigų suma;
- procentais, skaičiuojamais nuo draudimo sumos.

Skyrelio pabaigoje pilkajame fone kaip neprivaloma medžiaga pateikta užduotis, leidžianti praktiškai įvertinti draudimo prasmę. Nors ji ir nėra sunki, bet iš mokinių pareikalaus daug kruopštumo. Be to, teks užduoties sąlygą perskaityti ne vieną kartą. Siūlome šią užduotį liepti išspręsti namuose. Pateikiame jos sprendimą.

1) Drausdamasis nuo gaisro kiekvienas šeimininkas sumoka $40\,000 \cdot 0{,}015 = 600$ (Lt), visi — 7200 Lt.
Drausdamiesi nuo stichinių nelaimių visi kartu sumoka: $40\,000 \cdot 0{,}008 \cdot 12 = 3840$ (Lt).
Drausdamiesi nuo vagystės visi kartu sumoka: $40\,000 \cdot 0{,}016 \cdot 12 = 7680$ (Lt).
2) Drausdami mašinas nuo avarijų visi kartu sumoka: $10\,000 \cdot (0{,}04 + 0{,}08) \cdot 12 = 14\,400$ (Lt).
3) Drausdami mašinas nuo vagystės visi kartu sumoka: $10\,000 \cdot 0{,}028 \cdot 24 = 6720$ (Lt).

Taigi draudimo kompanija per metus gauna: $7200 + 3840 + 7680 + 14\,400 + 6720 = 39\,840$ (Lt).

a) Jei per metus nepavagiama nė viena mašina, tai draudimo kompanija sumoka:
1) dėl gaisro — $40\,000 \cdot 0{,}2 = 8000$ (Lt); 2) dėl žaibo — $40\,000 \cdot 0{,}25 = 10\,000$ (Lt);
3) dėl vagysčių — $40\,000 \cdot 0{,}1 \cdot 2 = 8000$ (Lt); 4) dėl avarijų — $10\,000 \cdot 0{,}05 \cdot 2 \cdot 12 = 12\,000$ (Lt).
Iš viso draudimo kompanija sumoka: $8000 + 10\,000 + 8000 + 12\,000 = 38\,000$ (Lt).
Taigi jai lieka $39\,840 - 38\,000 = 1840$ (Lt). Nors ir ne kažin kas, bet drausti verta.

b) Už pavogtą mašiną draudimas sumokės: $10\,000 \cdot 0{,}028 = 280$ (Lt).
Kompanijai lieka: $39\,840 - 38\,280 = 1560$ (Lt). Drausti vis dar verta.
Nurodymas. Pasiūlykite mokiniams „patobulinti" uždavinį taip, kad draudimo kompanija turėtų nuostolį.

Reziumuojant pokalbių su mokiniais apie draudimą turinį reikėtų *pabrėžti* ir *patarti*:

1. Draustis nuo įvairių įvykių (draudėjų kalba — rizikų) yra naudinga.
2. Apsisprendus draustis reikia pasirinkti draudimo kompaniją. Tam gali padėti įvairios pačių kompanijų spausdinamos ir platinamos reklaminės skrajutės arba jau esantys kompanijų klientai — draugai ar pažįstami.
3. Verta pratęsti draudimo sutartis toje pačioje kompanijoje, nes nuolatiniams klientams taikomos nuolaidos.

Pakartoti:	***Išmokti:***
nuolaidos skaičiavimą;	apskaičiuoti draudimo mokestį (Lt);
procentinės nuolaidos radimą.	apskaičiuoti draudimo mokesčio tarifą procentais.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

15–20 pratimai — teminiai, o kartu ir kartojimo (paprastųjų procentų skaičiavimas). 16–25

15. Draudžiant namų turtą atskirai nuo stichinės nelaimės ir atskirai nuo vagystės reikia mokėti $72 + 192 = 264$ (Lt). Draudžiant namų turtą nuo stichinės nelaimės ir nuo vagystės kartu reikia mokėti $\frac{264 \cdot (100-20)}{100} = 211{,}2$ (Lt), o tai sudaro $\frac{211{,}2 \cdot 100}{12\,000} = 1{,}76$(%) draudimo sumos.
Atsakymas. 1,76%.

16. 191,95 Lt.

17. *I būdas.* $75\,000 \cdot \frac{0{,}195}{100} - 75\,000 \cdot \frac{0{,}15}{100} = 33{,}75$ (Lt).
II būdas. Medinio gyvenamojo namo draudimas kainuoja $0{,}195 - 0{,}15 = 0{,}045$ (%) daugiau negu mūrinio gyvenamojo namo, o tai yra $75\,000 \cdot \frac{0{,}045}{100} = 33{,}75$ (Lt).

18. Sodo namelio draudimas kainuoja $\frac{40\,000 \cdot 0{,}275}{100} = 110$ (Lt). Tada sodybos draudimas kainuoja $110 + 70 = 180$ (Lt). Sodybos draudimo mokesčio tarifas yra $\frac{180 \cdot 100}{40\,000} = 0{,}45$(%).
Atsakymas. 0,45%.

19. a) 7500 Lt; b) 5625 Lt; c) 22 500 Lt; d) 15 000 Lt.

20. a) Pirmaisiais metais turtinės žalos atlyginimo draudimas kainuoja 0,98%, o asmens žalos atlyginimo draudimas kainuoja 0,32% draudimo sumos.
b) Turtinės žalos atlyginimo draudimas kainuoja: 465,5 Lt, 416,5 Lt, 367,5 Lt, 367,5 Lt; asmens žalos atlyginimo draudimas kainuoja: 152 Lt, 136 Lt, 120 Lt, 120 Lt.

1. SUDĖTINIAI PROCENTAI

Skyriaus pavadinimas nusako pagrindinį tikslą — mokyti spręsti uždavinius, susijusius su sudėtiniais procentais. Kaip ankstesniuose naujuosiuose vadovėliuose, taip ir šiame procentų mokymas siejamas su ekonomikos klausimais. Šiame skyriuje nėra naujų, mokiniams negirdėtų ekonomikos sąvokų, tik pirmajame skyrelyje kalbama apie *sudėtines palūkanas*. (Ankstesnėse klasėse nagrinėjant paprastuosius procentus buvo kalbama apie *paprastąsias palūkanas*.)

Šį skyrių galima laikyti 9 klasės vadovėlio paskutiniojo skyriaus (Matematika 9, II dalis, 10 skyrius) „Paprastieji procentai ekonomikoje" tęsiniu.

Pastaba. Kai kurie mokiniai sudėtinių procentų skaičiavimą geriau įsisavina, kai jie gretinami su paprastaisiais procentais. Todėl minėtą 9 klasės skyrių galima nagrinėti ir 10 klasėje. Suprantama, 10 klasėje negalima apsiriboti vien tik sudėtiniais procentais — reikia grįžti ir prie paprastųjų procentų; ypač tai aktualu, jei 9 klasėje paprastiesiems procentams nagrinėti trūko laiko.

Šio skyriaus struktūrą galima nusakyti taip: pirmuose dviejuose skyreliuose aiškinami sudėtiniai procentai, trečiame skyrelyje parodoma, kaip sudėtiniai procentai siejasi su geometrine progresija.

Nurodymai. 1) Svarbiausi yra pirmieji du skyreliai. Trečiasis skyrelis įdomus ir naudingas praktiškai, bet, trūkstant laiko, jo galima nenagrinėti, nes geometrinė progresija neįeina į pagrindinės mokyklos kursą — ji bus nagrinėjama vidurinėje mokykloje išplėstiniame kurse.

2) Sprendžiant su ekonomika ir procentų skaičiavimais susijusius uždavinius patartina naudotis skaičiuokliu.

Minimalus lygmuo:

1. Suprasti ir skirti sąvokas: *paprastieji procentai, sudėtiniai procentai* (paprastosios palūkanos, sudėtinės palūkanos).
2. Gebėti spręsti paprastus uždavinius, susijusius su sudėtiniais procentais:
   1) apskaičiuoti indėlio sumą S_t po t metų ($t = 2, 3$), kai į banką padėta pinigų suma S ir bankas moka p procentų sudėtinių metinių palūkanų; apskaičiuoti, kiek bus gauta palūkanų;
   2) apskaičiuoti dabartinę prekės kainą žinant jos pradinę kainą, jei prekė buvo branginama (piginama) du kartus po tiek pat procentų.

Pagrindinis lygmuo:

3. Suprasti ir gebėti pagrįsti formulę $S_t = S(1 + \frac{p}{100})^t$, $t \in N$; čia S_t — indėlio banke suma po t metų, S — padėta į banką suma (pradinis indėlis), p — banko mokami metiniai (sudėtiniai) procentai (sudėtinių metinių palūkanų norma). Gebėti remtis šia formule skaičiuojant S_t, S arba p, kai žinomi kiti trys į formulę įeinantys dydžiai.
4. Suvokti į formulę $S_t = S(1 + \frac{p}{100})^t$, $t \in N$, įeinančio daugiklio $(1 + \frac{p}{100})^t$ prasmę.
5. Gebėti spręsti uždavinius, kai pradinis dydis S kelis kartus padidėja (sumažėja) po tiek pat procentų. Gebėti paaiškinti formules $S_n = S(1 + \frac{p}{100})^n$, $S_n = S(1 - \frac{p}{100})^n$, $n \in N$, ir jomis remtis sprendžiant uždavinius, susijusius su sudėtiniais procentais.
6. Suprasti, kokia skaičių seka vadinama geometrine progresija, gebėti pateikti jos pavyzdžių, remiantis n-tojo nario formule apskaičiuoti bet kurį jos narį, kai žinomas progresijos vardiklis ir pirmasis narys.

Aukštesnis lygmuo:

7. Realiuose uždaviniuose remiantis formulėmis $S_n = S(1 \mp \frac{p}{100})^n$ gebėti apskaičiuoti n, kai žinomi kiti trys į formulę įeinantys dydžiai.
8. Spręsti uždavinius, susijusius su sudėtinėmis palūkanomis, kai jos skaičiuojamos ne tik už metus, bet ir kitokiais laiko tarpsniais (pvz., kas pusę metų, kas ketvirtį, kas mėnesį).
9. Gebėti pagrįsti formulę $S_{mt} = S(1 + \frac{p}{m \cdot 100})^{mt}$, $m \in N$, $t \in N$; čia S_{mt} — indėlio banke suma po mt laiko tarpsnių, S — pradinė suma, p — metiniai sudėtiniai procentai, t — metų skaičius, m — kartų per metus, kai skaičiuojamos palūkanos, skaičius.
10. Suprasti sąvokas: *pastoviųjų palūkanų* ir *mažėjančiųjų palūkanų* paskolos.
11. Mokėti išvesti geometrinės progresijos n-tojo nario formulę.
12. Remiantis geometrinės progresijos pirmųjų n narių sumos formule $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}$, $q \neq 1$, apskaičiuoti kurį nors į tą formulę įeinantį dydį, kai žinomi kiti į formulę įeinantys dydžiai.

Šiame skyrelyje nagrinėjami realaus gyvenimo uždaviniai, susiję su bankų mokamomis sudėtinėmis palūkanomis už padėtą indėlį. Čia verta pastebėti, kad bankų praktikoje beveik visada už indėlį skaičiuojamos sudėtinės palūkanos, todėl dažniausiai bankai nenurodo, kad skaičiuoja sudėtinius procentus, o sako tiesiog, pavyzdžiui, „bankas moka 5% metinių palūkanų". Aišku, tokia formuluotė matematiškai nėra tiksli, todėl pateikiant uždavinių sąlygas reikėtų nurodyti, kokie procentai (paprastieji ar sudėtiniai) konkrečioje situacijoje yra nagrinėjami. Jei sąlygoje nenurodyta procentų rūšis, tai mokytojui reikėtų paaiškinti, kaip tokiu atveju elgtis. Matyt, tada geriausia uždavinį išspręsti tiek su paprastaisiais, tiek su sudėtiniais procentais, o kartais tenka vadovautis „sveiku protu" (pavyzdžiui, „Kengūros" konkurso tipo uždaviniuose) ir nuspręsti, kokius procentus tame uždavinyje reikia skaičiuoti.

Pagrindinis šio skyrelio tikslas — išmokyti spręsti su sudėtinėmis palūkanomis susijusius uždavinius.

Nurodymas. Visai nebūtina reikalauti iš mokinių (ypač iš silpnesnių) žinoti sudėtinių palūkanų skaičiavimo formulę ir sprendžiant uždavinius, remtis ja. Svarbiausia, kad mokiniai samprotaudami sugebėtų išspręsti pateiktą uždavinį — įsisavintų sudėtinių procentų skaičiavimo algoritmą.

Pakartoti:

procento, palūkanų ir palūkanų normos sąvokas;
paprastąsias palūkanas;
procentų, trupmenų ir „kartų" ryšį;
kvadratinės lygties, kurios pavidalas yra $(x+a)^2 = b$, sprendimą.

Išmokti:

kas yra sudėtinės palūkanos;
kuo sudėtinės palūkanos skiriasi nuo paprastųjų;
spręsti su sudėtinėmis palūkanomis susijusius uždavinius.

Šiame skyrelyje:

1. Siekiant pakartoti paprastąsias palūkanas ir įvesti sudėtinių palūkanų sąvoką, nagrinėjama situacija, kai ta pati pinigų suma:
   - paskolinama, sutariant už paskolą paprastąsias metines palūkanas;
   - padedama į banką, kuris už ją skaičiuoja sudėtines metines palūkanas.

   Nurodymai. 1) Šią situaciją būtina išnagrinėti su visais mokiniais. Reikia siekti, kad visi suprastų, kuo skiriasi paprastosios palūkanos nuo sudėtinių. Mokiniai turi suvokti, kad abiem atvejais po metų bus gaunama ta pati suma, o po dvejų ar daugiau metų sudėtinių palūkanų atveju bus gaunama didesnė suma negu paprastųjų palūkanų atveju, nes sudėtinės palūkanos gaunamos jas skaičiuojant nuo priaugusios sumos (skaičiuojami ir procentų procentai) — todėl jos ir vadinamos sudėtinėmis.
   2) Nagrinėjant šią situaciją reikia stengtis, kad mokiniai gerai suprastų procentų ir „kartų" ryšį. Mokiniai turi suvokti, kad indėlio sumos padidėjimas p procentų atitinka indėlio sumą, $(1+\frac{p}{100})$ kartų didesnę. Tai geriausia įsisąmoninti nagrinėjant konkrečius, paprastus atvejus. Pavyzdžiui, padidėjimas 50% atitinka 1,5 karto didesnį indėlį, o 100% — 2 kartus didesnį. Siekiant šio tikslo nereikėtų taupyti laiko (ypač su silpnesniais mokiniais). Prie procentų ir „kartų" ryšio bus grįžtama 2 skyrelyje.
   3) Išsiaiškinti, ar mokiniai gerai suprato skyrelio pradžioje pateiktą situaciją, galima liepus jiems atsakyti į klaustuku pažymėtą klausimą ir atlikti 1 užduotį.
   4) Silpniausieji mokiniai tolesnės teorinės medžiagos gali ir nenagrinėti.
2. Skyrelio pradžioje aiškinta situacija su sudėtiniais procentais nagrinėjama bendruoju atveju — vietoj konkrečių skaičių imant raides, kitaip sakant, išvedama formulė $S_t = S(1+\frac{p}{100})^t$, $t \in \mathbf{N}$. Formule patogu remtis sprendžiant uždavinius, tačiau nebūtina.

   Nurodymai. 1) Svarbu, kad mokiniai suvoktų į formulę įeinančio daugiklio $(1+\frac{p}{100})$ prasmę.
   2) Formulės išvedimas yra nesudėtingas, bet raidinė jos išraiška mokinius gali bauginti, nes į ją įeina indeksas, laipsnis. Jokiu būdu nereikia liepti mokiniams mintinai išmokti formulę ir reikalauti sprendžiant uždavinius ja remtis. Daug svarbiau būtų pasiekti, kad mokiniai suprastų, kokie dydžiai įeina į formulę, ir mokėtų tą formulę nusakyti žodžiais, atitinkančiais situaciją.
   3) Mokiniams galima pasiūlyti išvesti formulę paprastųjų procentų atveju: $S_t = S(1+\frac{p}{100}\cdot t)$. (Ši formulė buvo išvesta 9 klasėje, žr. Matematika 9, II dalis, 145 p.) Su stipresniais mokiniais reikėtų abi formules sugretinti ir apibūdinti jų bendrumus ir skirtumus.
3. Pateikti du pavyzdžiai uždavinių, kuriuos sprendžiant remiamasi formule $S_t = S(1+\frac{p}{100})^t$.

   Nurodymai. 1) Mokiniai kartais klysta neteisingai surašydami į formulę įeinančių dydžių reikšmes, todėl ypač silpnesnieji mokiniai turėtų neskubėti rašyti žinomus dydžius į formulę. Iš pradžių reikėtų gerai išsiaiškinti jų esmę.
   2) Dažnai net ir teisingai surašius žinomus dydžius į formulę būna nelengva išspręsti gautąją lygtį. Daug sunkumų gali sukelti pirmojo uždavinio lygties sprendimas. Todėl mokiniams reikėtų pasakyti, kad gautoji lygtis (1 uždavinyje) yra kvadratinė ir ją išspręsti neturėtų būti sunku — tik lygties pavidalas yra kiek neįprastas.

3) Galima pasiūlyti patikrinti gautus pirmojo ir antrojo uždavinių atsakymus. (Sprendžiant šio skyriaus uždavinius rekomenduokite mokiniams atsakymus tikrinti.)

4) Spręsdami uždavinį mokiniai pirmiausia gali išreikšti nežinomą dydį (ypač tai praktikuoja fizikai), bet dažniausiai tai nepalengvina sprendimo, o tik padaroma klaidų. Todėl rekomenduokite iš karto į formulę rašyti žinomus dydžius, o tik po to spręsti gautąją lygtį.

5) Dažnai tokio tipo uždaviniuose gaunami „negražūs" skaičiai. Tokiu atveju reikia suapvalinti tik galutinius atsakymus, kaip padaryta antrame uždavinyje. Nepatartina apvalinti tarpinių rezultatų. Tai tik didins galutinio atsakymo paklaidą.

6) Į formulę $S_t = S(1 + \frac{p}{100})^t$ įeina keturi dydžiai: S_t, S, p ir t. Todėl galima sudaryti 4 tipų uždavinių rasti kuriam nors dydžiui, kai žinomi kiti trys.
Beje, nežinant dydžio t tektų spręsti rodiklinę lygtį. Tokią lygtį dešimtokai gali spręsti bandymų ir klaidų metodu naudodamiesi skaičiuokliu. Aišku, su silpnesniais mokiniais tokių uždavinių nereikėtų nagrinėti iš viso.

4. Bankų praktikoje palūkanos kartais skaičiuojamos ne vieną kartą per metus, bet, pavyzdžiui, 2 kartus (kas pusmetį), 4 kartus (kas ketvirtį), 12 kartų (kas mėnesį) ar net 365 kartus (kas dieną). Tada indėlio kitimas apskaičiuojamas pagal formulę $S_{mt} = S(1 + \frac{p}{m \cdot 100})^{mt}$, $m, t \in \mathbf{N}$. Šis atvejis yra neprivalomas, todėl ši medžiaga pateikiama pilkajame fone ir ją siūloma nagrinėti tik su stipriausiais mokiniais.
Nurodymai. 1) Mokiniams reikėtų paaiškinti, kad jeigu bankas skaičiuoja p procentų *metinių* sudėtinių palūkanų m kartų per metus, tai per vienerius metus yra m kartų skaičiuojamos $\frac{p}{m}$ procentų sudėtinės palūkanos, o per t metų palūkanos bus skaičiuojamos $m \cdot t$ kartų. Ši situacija yra analogiška atvejui, kai bankas $m \cdot t$ kartų skaičiuoja $\frac{p}{m}$ sudėtinių palūkanų. Pasakykite mokiniams, kad kuo daugiau kartų per metus yra skaičiuojamos sudėtinės palūkanos, tuo naudingiau indėlininkui. Pastebėti šią naudą indėlininkui galima iš 2 bei 3 uždavinių, tam šių uždavinių skaičiai yra parinkti vienodi. Pasiūlykite mokiniams išspręsti 3 uždavinį skaičiuojant palūkanas kas ketvirtį, kas mėnesį, kas dieną.

5. Teorinės dalies pabaigoje nagrinėjama situacija susijusi su paskolomis.
Nurodymas. Nors ši medžiaga pateikta pilkajame fone kaip neprivaloma, bet, turint laiko, ją galima nagrinėti ir su visais mokiniais. Tikėtina, kad daug kam gyvenime teks imti paskolas ir reikės jas grąžinti. Todėl vadovėlyje nagrinėjamas pavyzdys turėtų būti praktiškai naudingas ir mokiniams suteikti gyvenime reikalingų teorinių žinių.
9 klasėje buvo nagrinėjamos paskolos su *pastoviosiomis* palūkanomis (Matematika 9, II dalis, 10 skyrius, 1 skyrelis). Šiame skyrelyje nagrinėjamas pavyzdys su *mažėjančiosiomis* palūkanomis. Mokiniams reikėtų paaiškinti, kodėl paskolos *gavėjui* naudingesnė yra mažėjančiųjų palūkanų paskola.
Imant paskolą patogu susidaryti grąžinimo planą, t. y. surašyti, kada ir kokią sumą reikia grąžinti. Kaip tai galima padaryti, parodyta pavyzdyje.
Nurodymas. Visada pravartu suskaičiuoti, kiek paskolos gavėjui kainuos paskola, t. y. kiek už paskolą reikės sumokėti palūkanų. Vadovėlyje nėra pateiktos formulės, bet jas nesunkiai galima išvesti. *Sakykime, paimta S litų mažėjančiųjų palūkanų paskola t metų laikotarpiui. Paskolą reikia grąžinti kasmet sumokant* $\frac{S}{t}$ *paskolos dalį ir p procentų palūkanas, skaičiuojant jas nuo paskolos likučio. Raskime, kiek iš viso reikės sumokėti palūkanų per t metų.*
Po pirmųjų metų reikės sumokėti $\frac{p}{100} \cdot S$ palūkanų;
po antrųjų metų — $\frac{p}{100} \cdot (S - \frac{S}{t}) = \frac{p}{100} \cdot S \cdot (1 - \frac{1}{t})$;
po trečiųjų metų — $\frac{p}{100} \cdot (S - \frac{2S}{t}) = \frac{p}{100} \cdot S \cdot (1 - \frac{2}{t})$;
. . . .
po t-ųjų metų — $\frac{p}{100} \cdot (S - \frac{(t-1)S}{t}) = \frac{p}{100} \cdot S \cdot (1 - \frac{t-1}{t})$.
Iš viso per t metų bus sumokėta palūkanų:

$$\frac{p}{100} \cdot S + \frac{p}{100} \cdot S \cdot \Big(1 - \frac{1}{t}\Big) + \frac{p}{100} \cdot S \cdot \Big(1 - \frac{2}{t}\Big) + \dots$$
$$\dots + \frac{p}{100} \cdot S \cdot \Big(1 - \frac{t-1}{t}\Big) =$$
$$= \frac{p}{100} \cdot S \cdot \bigg(1 + \Big(1 - \frac{1}{t}\Big) + \Big(1 - \frac{2}{t}\Big) + \dots$$
$$\dots + \Big(1 - \frac{t-1}{t}\Big)\bigg) =$$
$$= \frac{p}{100} \cdot S \cdot \Big(t - \frac{1}{t} - \frac{2}{t} - \dots - \frac{t-1}{t}\Big) =$$
$$= \frac{p}{100} \cdot S \cdot \bigg(t - \Big(\frac{1}{t} + \frac{2}{t} + \dots + \frac{t-1}{t}\Big)\bigg) =$$
$$= \frac{p}{100} \cdot S \cdot \Big(t - \frac{1 + 2 + \dots + (t-1)}{t}\Big) =$$
$$= \frac{p}{100} \cdot S \cdot \Big(t - \frac{t-1}{2}\Big) = \frac{p}{100} \cdot S \cdot \frac{t+1}{2}.$$

Taigi, jei paskola paimta metams, tai reikės sumokėti $\frac{p}{100} \cdot S$ palūkanų, jei dvejiems — $\frac{3}{2} \cdot \frac{p}{100} \cdot S$, jei trejiems — $2 \cdot \frac{p}{100} \cdot S, \dots$, jei 99 metams — $50 \cdot \frac{p}{100} \cdot S$. O iš viso per t metų sumokėta suma lygi

$$S + \frac{p}{100} \cdot S \cdot \frac{t+1}{2} = S\Big(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{t+1}{2}\Big).$$

Pastaba. Pastoviųjų palūkanų atveju analogiškos formulės išvestos 9 klasėje:
— palūkanų suma $\frac{p}{100} \cdot S \cdot t$;
— grąžintina suma $S\big(1 + \frac{p}{100} \cdot t\big)$.
Aišku, mažėjančiųjų palūkanų atveju išvesti formules gali tik stipresnieji mokiniai, bet jomis patogu naudotis visiems. Pavyzdžiui, vadovėlyje pateiktu paskolos atveju remiantis mažėjančiųjų palūkanų formule nesunku apskaičiuoti, kad per 3 metus reikės sumokėti $\frac{9}{100} \cdot 4500 \cdot \frac{3+1}{2} = 810\,(\text{Lt})$ palūkanų.
Nurodymas. Stipresniųjų mokinių galima paklausti, kiek palūkanų reikės sumokėti paėmus analogišką nagrinėjamam pavyzdžiui paskolą, imant ją 10 metų, 20 metų, 99 metams ir pan.

21–35 uždaviniai yra teminiai, o 36–43 — kartojimo. 1–21

21. Indėlio suma bus:

a) $8000\left(1+\frac{5}{100}\right)^2 = 8000 \cdot 1{,}05^2 = 8820\,(\text{Lt})$;

b) 8904,2 Lt; c) 8988,8 Lt; d) 9073,8 Lt.

22. a) Po dvejų metų banke bus $3000 \cdot \left(1+\frac{7{,}5}{100}\right)^2 = 3000 \cdot 1{,}075^2 \approx 3466{,}88\,(\text{Lt})$. Po dvejų metų iš banko bus gauta $3466{,}88 - 3000 = 466{,}88\,(\text{Lt})$ palūkanų.

b) $3000 \cdot \frac{7{,}5}{100} \cdot 2 = 450\,(\text{Lt})$.

23. a) $7500 \cdot \frac{6}{100} \cdot 3 = 1350\,(\text{Lt})$; b) $7500 \cdot \left(1+\frac{6}{100}\right)^3 - 7500 = 1432{,}62\,(\text{Lt})$.

24. a) 577,56 Lt; b) 673,82 Lt; c) 770,07 Lt; d) 866,33 Lt.

25. a) 1500 Lt; b) 8%; c) 1620 Lt, 1889,57 Lt, 2040,73 Lt;
d) 1276,40 Lt, 1738,39 Lt.

26. a) $2000\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 = 2163{,}2$; $\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 = 1{,}0816$. Kadangi $1+\frac{p}{100} > 0$, tai $1+\frac{p}{100} = 1{,}04$; $p = 4\%$;

b) 5%; c) 6%; d) 5,5%.

27. Indėlio banke sumą apskaičiuojame remdamiesi formule $S_t = S\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$. Kai $S_t = 12\,000$ Lt, $p = 8\%$, tai $12\,000 = S\left(1+\frac{8}{100}\right)^t = S \cdot 1{,}08^t$. Tada $S = \frac{12\,000}{1{,}08^t}$.

a) Kai $t = 2$ m., tai $S = \frac{12\,000}{1{,}08^2} \approx 10\,288{,}07\,(\text{Lt})$;

b) 9525,99 Lt; c) 8820,36 Lt; d) 8167,00 Lt.

28. a) $8932{,}62 = 7500 \cdot 1{,}06^t$; $1{,}06^t = 1{,}191016...$; $t = 3$; b) $t = 4$.

Nurodymas. Patarkite moksleiviams gautą lygtį spręsti skaičiuokliu spėjimo būdu, t. y. bandymų ir klaidų metodu.

Šio uždavinio su silpnesniais mokiniais galima ir nenagrinėti.

29. *I būdas.* Po 1 metų sąskaitoje bus $10\,000 \cdot 1{,}075 = 10\,750\,(\text{Lt})$;
po 2 m. — 11 556,25 Lt; po 3 m. — 12 422,97 Lt; po 4 m. — 13 354,69 Lt;
po 5 m. — 14 356,29 Lt; po 6 m. — 15 433,02 Lt; po 7 m. — 16 590,49 Lt;
po 8 m. — 17 834,78 Lt; po 9 m. — 19 172,39 Lt.
Taip surašę sumas nesunkiai atsakysite į klausimą.

II būdas. a) $10\,000 \cdot \left(1+\frac{7{,}5}{100}\right)^t \geqslant 15\,000$; $1{,}075^t \geqslant 1{,}5$; $t \geqslant 6$.

Atsakymas. a) Po 6 m.; b) po 7 m.; c) po 8 m.; d) po 9 m.

Pastaba. Uždavinio klausimas ne visai tikslus. Moksleivis gali parašyti ir tokį atsakymą, pavyzdžiui, a) po 10 metų. Klausimą reikėtų patikslinti taip: „Kiek *mažiausiai* metų turi praeiti, kad toje sąskaitoje būtų..."

30. a) Kadangi indėlis padėtas 2 metams ($t = 2$), o palūkanos skaičiuojamos kas pusmetį, t. y. du kartus per metus ($m = 2$), tai per dvejus metus palūkanos buvo skaičiuojamos $2 \cdot 2 = 4$ kartus. Pusmetinės palūkanos sudaro $7 \cdot \frac{1}{2} = 3{,}5\,(\%)$;

b) 36 kartus; mėnesio palūkanos sudaro $12 \cdot \frac{1}{12} = 1\,(\%)$.

31. a) Palūkanos skaičiuojamos du kartus per metus ($m = 2$), todėl laiko tarpsnių yra $2 \cdot 2 = 4$, o pusmetinės palūkanos sudaro $12 \cdot \frac{1}{2} = 6\,(\%)$. Vadinasi, bankas už 10 000 Lt indėlį 4 kartus skaičiuos sudėtines 6% palūkanas. Todėl po 2 metų banke bus $S_4 = 10\,000 \cdot \left(1+\frac{6}{100}\right)^4 = 10\,000 \cdot 1{,}06^4 \approx 12\,624{,}77\,(\text{Lt})$. Palūkanos sudaro $12\,624{,}77 - 10\,000 = 2624{,}77\,(\text{Lt})$;

b) $m = 3$; $mt = 3 \cdot 2 = 6$; $\frac{p}{m} = \frac{12}{3} = 4(\%)$;
$S_6 = 10\,000\left(1+\frac{4}{100}\right)^6 = 10\,000 \cdot 1{,}04^6 \approx 12\,653{,}19\,(\text{Lt})$,
o palūkanos sudaro $12\,653{,}19 - 10\,000 = 2653{,}19\,(\text{Lt})$;

c) 2667,70 Lt; d) 2697,35 Lt.

Spręsdami šį uždavinį moksleiviai įsitikins, kad indėlininkui naudingiau, kai bankas skaičiuoja sudėtines palūkanas dažniau.

32. Indėlininkui naudingiau, kai bankas skaičiuoja palūkanas kas du mėnesius.

33.

Mokėjimai (metų skaičius)	Paskolos likutis (Lt)	Palūkanos (Lt)	Grąžinimo suma (Lt)	Įmoka (Lt)
1	4000	520	1000	1520
2	3000	390	1000	1390
3	2000	260	1000	1260
4	1000	130	1000	1130
Iš viso:	—	1300	4000	5300

34. a)

Mokėjimai (metų skaičius)	Paskolos likutis (Lt)	Palūkanos (Lt)	Grąžinimo suma (Lt)	Įmoka (Lt)
1	20 000	3000	4000	7000
2	16 000	2400	4000	6400
3	12 000	1800	4000	5800
4	8000	1200	4000	5200
5	4000	600	4000	4600
Iš viso:	—	9000	20 000	29 000

b) 29 000 Lt.

35. a) Kasmetinė paskolos grąžinimo suma yra $2400 : 3 = 800$ (Lt). Paskolos likutis po metų: $2400-800 = 1600$ (Lt); po 2 metų: $1600-800 = 800$ (Lt); po 3 metų: $800 - 800 = 0$ (Lt).
Pirmųjų metų gale reikia sumokėti $2400 \cdot 0,1 = 240$ (Lt);
antrųjų metų gale: $1600 \cdot 0,1 = 160$ (Lt);
trečiųjų metų gale: $800 \cdot 0,1 = 80$ (Lt) palūkanų.
Iš viso reikės sumokėti $240 + 160 + 80 = 480$ (Lt) palūkanų.
b) Reikės sumokėti $2400 \cdot \frac{6}{100} \cdot 3 = 432$ (Lt) palūkanų.
Atsakymas. a) 480 Lt; b) 432 Lt.

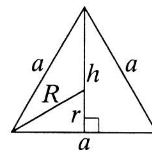
36. a) 60,5 Lt, 66 Lt; b) 45 000 Lt, 75 000 Lt.

37. a) 9000 Lt; b) 10 000 Lt; c) 12 000 Lt; d) 15 000 Lt.

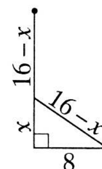
38. a) 64 500 Lt; b) 70 500 Lt.

39. a) *I būdas.* Iš viso prekė atpigo $18-15 = 3$ (Lt). Kadangi prekė buvo atpiginta penkis kartus po tiek pat litų, tai kiekvieną kartą prekė atpigo $\frac{3}{5} = 0,6$ (Lt).
II būdas. Sakykime, kad prekė kiekvieną kartą atpigo po x Lt. Tada per 5 kartus ji atpigo $5x$ Lt. Pagal sąlygą: $18 - 5x = 15$, $x = 0,6$ (Lt).
Taigi prekės kainų (Lt) nuo pradinės iki dabartinės reikšmių seka bus tokia: 18; 17,4; 16,8; 16,2; 15,6; 15;
b) 0,8; 18; 17,2; 16,4; 15,6; 14,8; 14.

40. a) $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 6$ (cm); (arba pagal Pitagoro teoremą $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$; $\left(\frac{4\sqrt{3}}{2}\right)^2 + h^2 = (4\sqrt{3})^2$; $h = 6$);
b) $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(4\sqrt{3})^2\cdot\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$ (cm^2); (arba $S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 = 12\sqrt{3}$);
c) $R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3} = 4$ (cm); (arba $R = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$);
$S = \pi \cdot 4^2 = 16\pi \approx 50,24$ (cm^2);
d) $r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{6} = 2$; (arba $r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$; arba $r = h - R = 6 - 4 = 2$); $C = 2\pi \cdot 2 = 4\pi \approx 12,56$ (cm).



41. $x^2 + 8^2 = (16 - x)^2$, $x = 6$ m.



42. Per 1 min. Tomas nuvažiuoja $\frac{1}{4}$, o Gintaras — $\frac{1}{3}$ treko žiedo. Per 1 min. Gintaras prisiveja Tomą $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ žiedo, todėl visu ratu aplenkia kas $1 : \frac{1}{12} = 12$ (min).
Atsakymas. **D.**

43. Kadangi ant trečios dėžutės parašyta „Kruopos arba cukrus“, tai trečioje dėžutėje yra žirniai. Tada pirmoje dėžutėje yra cukrus, o antroje — kruopos.

1.2. Sudėtinių procentų uždaviniai

Iš ankstesnio skyrelio mokiniai kartais gali susidaryti vaizdą, kad sudėtiniai procentai reikalingi tik dėl palūkanų. Todėl šis skyrelis, nors ir analogiškas prieš tai nagrinėtam, atskleidžia mokiniams naujas realias sudėtinių procentų taikymo situacijas: prekės kainos, daikto vertės, gyventojų skaičiaus ir kt. skaičiavimus. Kartu šiame skyrelyje mokoma rasti dydį S_n ne tik kai pradinis dydis S padidėja n kartų po p sudėtinių procentų, bet ir kai dydis S sumažėja n kartų po p sudėtinių procentų.

Tokia situacija dažniausiai sutinkama uždaviniuose, susijusiuose su kainų mažinimu ar didinimu keletą kartų po tiek pat procentų. Skyrelyje išvedamos formulės:

- kai dydis S mažėja n kartų po $p\%$, tai galutinis rezultatas yra $S_n = S(1 - \frac{p}{100})^n$;
- kai dydis S didėja n kartų po tiek pat procentų, tai $S_n = S(1 + \frac{p}{100})^n$.

Nurodymas. Tai labai svarbus skyrelis. Būtų gerai, kad dauguma mokinių mokėtų spręsti šiame skyrelyje pateiktus uždavinius, nes tokio tipo užduotys dažnai pasitaiko įvairiuose konkursuose ir egzaminuose.

Pakartoti:

prekės antkainio ir procentinio antkainio sąvokas; nuolaidos ir procentinės nuolaidos sąvokas.

Išmokti:

rasti naująją prekės kainą, žinant pradinę kainą bei kiek kartų ir po kiek procentų prekė atpigo (pabrango);
rasti prekės pradinę kainą, žinant naująją kainą bei kiek kartų ir po kiek procentų prekė atpigo (pabrango);
rasti, kiek procentų kiekvieną kartą atpigo (pabrango) prekė, žinant prekės pradinę ir naująją kainas bei kiek kartų prekė buvo piginama (branginama);
rasti, kaip ir kiek procentų pakito prekės kaina, žinant pradinę prekės kainą ir kad prekė buvo piginama (branginama) n kartų po $p\%$, o po to branginama (piginama) n kartų po $p\%$;
spręsti nesudėtingus daikto likutinės vertės (52 uždavinys), gyventojų skaičiaus (53 uždavinys) radimo uždavinius, taikant sudėtinius procentus.

Šiame skyrelyje:

1. Pateikiamas prekės kainos mažinimo keletą kartų po tiek pat procentų pavyzdys.
   Nurodymas. Reikia siekti, kad šį pavyzdį suprastų visi mokiniai. Kaip mokiniai suprato vadovėlyje pateiktus skaičiavimus, padės išsiaiškinti klaustuku pažymėtas klausimas. Pravartu būtų pateikti daugiau panašių pratimų (ypač silpnesniems mokiniams).
2. Išvedama formulė $S_n = S(1 - \frac{p}{100})^n$, čia S_n — prekės kaina po n-tojo kainos sumažinimo, S — pradinė prekės kaina, p — prekės kainos mažinimo procentai, n — prekės kainos mažinimo kartai.
   Nurodymai. 1) Svarbu, kad mokiniai suprastų į formulę įeinančio daugiklio $1 - \frac{p}{100}$ prasmę.
   2) Mokiniai turi suvokti, kad formulė yra teisinga, kai dydžiai S ir S_n reiškia ne tik prekės kainą. Pasiūlykite mokiniams sugalvoti uždavinių, nesusijusių su kainomis, bet kuriuos būtų galima spręsti remiantis šia formule.
3. Pateikiama užduotis, siūlanti išvesti analogišką formulę, kai prekės kaina didėja: $S_n = S(1 + \frac{p}{100})^n$.
   Nurodymai. 1) Jei mokiniai įsisavino praeito skyrelio medžiagą ir prieš šią užduotį esančią šio skyrelio medžiagą, tai atlikti užduotį jiems neturėtų būti sunku.
   2) Žr. 2 punkto nurodymus.
4. Išsprendžiami 3 uždaviniai, iliustruojantys, kada patogu remtis gautomis formulėmis.
   Nurodymai. 1) Nors pateikti uždaviniai nėra sunkūs, bet juos išspręsti silpnesniems mokiniams gali būti ne taip jau paprasta. Todėl neskubėkite ir skirkite pakankamai laiko pateiktų uždavinių sprendimo analizei.
   2) Šių uždavinių sprendimą palengvins skaičiuokliai.
   3) Į formules $S_n = S(1 \mp \frac{p}{100})^n$ įeina 4 dydžiai: S_n, S, p ir n. Bet uždavinių, kai yra nežinoma dydžio n reikšmė, galima nenagrinėti iš viso (vadovėlyje jų ir nėra pateikta).

44–55 uždaviniai yra teminiai, o 56–64 — kartojimo.

22–49

44. a) $75 \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right)^2 = 75 \cdot 0{,}9^2 = 60{,}75$ (Lt);
b) 54,68 Lt; c) 49,21 Lt; d) 44,29 Lt.

45. a) $75 \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right)^2 = 75 \cdot 1{,}08^2 = 87{,}48$ (Lt);
b) 94,48 Lt; c) 102,04 Lt; d) 110,20 Lt.

46. a) Sakykime, kad iš pradžių prekė kainavo x Lt.
Pagal sąlygą $x \cdot 0{,}85^2 = 130{,}05$; $x = 180$ (Lt).
b) Prekė atpigo $\frac{(180-130{,}05)\cdot 100}{180} = 27{,}75(\%)$.
c) Po pirmojo kainos sumažinimo prekė kainavo $180 \cdot 0{,}85 = 153$ (Lt).
d) Prekė kainuotų $130{,}05 \cdot \left(1 + \frac{15}{100}\right)^2 \approx 171{,}99$ (Lt).

47. a) 140 Lt; b) 9,75%; c) 133 Lt; d) 108,33 Lt.

48. a) $38{,}72 = 50 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2$; $\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = 0{,}7744$. Kadangi $1 - \frac{p}{100} > 0$, tai $1 - \frac{p}{100} = 0{,}88$; $p = 12\%$;
b) $p = 8\%$.

49. a) $2000 \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right)^2 = 2000 \cdot 0{,}9^2 = 1620$ (žmonių);
b) $2000 \cdot 0{,}9^3 = 1458 \approx 1460$ (žmonių).
Pastaba. Galima skaičiuoti ir be formulės:
a) antrą dieną parodą aplankė $2000 \cdot 0{,}9 = 1800$ (žmonių);
trečią dieną parodą aplankė $1800 \cdot 0{,}9 = 1620$ (žmonių);
b) ketvirtą dieną parodą aplankė $1620 \cdot 0{,}9 = 1458 \approx 1460$ (žmonių).
Taip skaičiuojant nereikės atlikti papildomų veiksmų atsakant į c) ir d) punktų klausimus.
c) 5420; d) 6880.

50. a) $500 \cdot 5^4 = 312\,500$;
b) $\frac{500\cdot 5^4}{500} = 625$.

Pastaba. Atkreipkite dėmesį, kad 50 ir 51 uždavinių sąlygose „kartus“ galima pakeisti procentais. 50 uždavinyje 5 kartai tapatu 400%, o 51 — trigubai reiškia 200%.

51. a) $50 \cdot 3^2 = 450$; b) $50 \cdot 3^3 = 1350$.

52. a) Staklių vertė po 6 metų bus $25\,000\left(1 - \frac{20}{100}\right)^6 = 25\,000 \cdot 0{,}8^6 = 6553{,}6$ (Lt);
po 9 metų: $25\,000 \cdot 0{,}8^9 \approx 3355{,}44$ (Lt) (arba: $6553{,}6 \cdot 0{,}8^3 \approx 3355{,}44$ (Lt)).
b) Per 6 metus staklės nuvertės $\frac{(25\,000-6553{,}6)\cdot 100}{25\,000} \approx 73{,}786(\%)$; per 9 metus staklės nuvertės maždaug 86,578%.

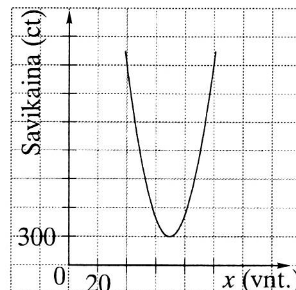
53. Sakykime, kad gyventojų skaičius kasmet sumažėja po $p\%$.
a) $230\,400 = 250\,000\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2$; $\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = 0{,}9216$; $1 - \frac{p}{100} = 0{,}96$, nes $1 - \frac{p}{100} > 0$; $p = 4\%$;
b) $p = 6\%$.

54. a) Prekė dabar kainuoja $a \cdot 0{,}9^2 \cdot 1{,}1^2 = 0{,}9801a$ (Lt). Vadinasi, prekė atpigo $\frac{a-0{,}9801a}{a} \cdot 100 = 1{,}99\,(\%)$.
b) Prekė atpigo 7,84%.

55. Sakykime, kad prekė kainuoja S Lt. Sprendžiame lygčių sistemą:
$$\begin{cases} S\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 11\,236, \\ S\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = 8836; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 + \frac{p}{100} = \frac{106}{\sqrt{S}}, \\ 1 - \frac{p}{100} = \frac{94}{\sqrt{S}}. \end{cases}$$
Sudėję abi sistemos lygtis gausime $2 = \frac{106}{\sqrt{S}} + \frac{94}{\sqrt{S}}$, $2\sqrt{S} = 200$, $\sqrt{S} = 100$, $S = 10\,000$ Lt.
Atsakymas. 10 000 Lt.
Pastaba. Šį uždavinį spręskite tik su stipresniais moksleiviais.

56. a) 0; b) −4.

57. Didžkukulio savikaina $S(x)$ išreikšta kvadratine funkcija. Jos grafikas yra parabolė, kurios šakos eina aukštyn. Parabolės viršūnės ordinatė atitinka mažiausią funkcijos reikšmę. Nustatykime funkcijos $S(x)$ viršūnės koordinates išskirdami dvinario kvadratą:



a) $2x^2 - 280x + 10\,100 = 2(x^2 - 140x + 5050) = 2(x^2 - 2 \cdot x \cdot 70 + 70^2 - 4900 + 5050) = 2((x-70)^2 + 150) = 2(x-70)^2 + 300$;
   1) kai parduodama 70 didžkukulių, tai vieneto savikaina yra mažiausia;
   2) minimali didžkukulio savikaina yra 300 ct, t. y. 3 Lt;

b) $3x^2 - 480x + 19\,470 = 3(x-80)^2 + 270$;
   1) 80 didžkukulių; 2) 2,7 Lt.

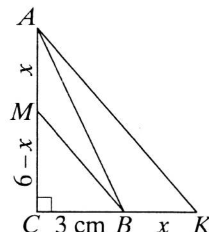
58. a) 3; 1; b) 3; −2; 0; 1; c) 1,5; 3; −2; 0; 1; $-\frac{2}{7}$; d) π; $\sqrt{3}$;
e) 1,5; 3; −2; 0; 1; π; $\sqrt{3}$; $-\frac{2}{7}$.

59. a) 24; b) $\approx 5{,}5$.

60. a) $8 \cdot 10^4$; ketvirta eilė; b) $1{,}73 \cdot 10^{-2}$; minus antra eilė.

61. a) **C**; b) **D**.

62. a) $S_{ACK} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (3 + x) = 3x + 9\,(\text{cm}^2)$;

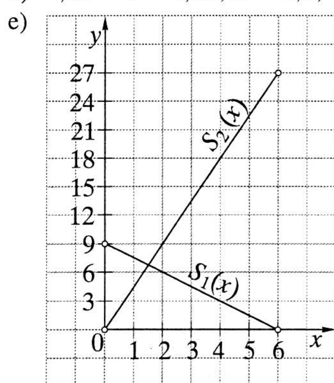


b) $S_{BCM} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (6 - x) = 9 - 1{,}5x\,(\text{cm}^2)$;

c) $S_{AMBK} = S_{ACK} - S_{BCM} = 3x + 9 - (9 - 1{,}5x) = 4{,}5x\,(\text{cm}^2)$;

d) $4{,}5x = 9 - 1{,}5x$; $x = 1{,}5$;

e)

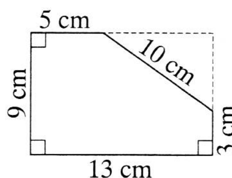


f) $0 < x < 1{,}5$.

63. Pagal sąlygą aišku, kad stačiakampio ilgis yra 13 cm. Bandymų ir klaidų metodu įsitikiname, kad stačiakampio plotis yra 9 cm, nes:

1) jei tarsim, kad plotis yra 5 cm, tai nuo stačiakampio nukirpus vieną kampą likusio pločio dalis yra 3 cm, o kitos dvi penkiakampio kraštinės turėtų būti 9 cm ir $2\sqrt{5}$ cm arba 10 cm ir $\sqrt{13}$, o tai neatitinka sąlygos duomenų;

2) jei tarsim, kad plotis yra 10 cm, tai nuo stačiakampio nukirpus vieną kampą likusio pločio dalis gali būti:
   arba 3 cm; tada kitos dvi penkiakampio kraštinės turėtų būti 5 cm ir $\sqrt{113}$ cm arba 9 cm ir $\sqrt{65}$ cm — neatitinka sąlygos;
   arba 5 cm; tada kitos dvi penkiakampio kraštinės turėtų būti 3 cm ir $5\sqrt{5}$ cm arba 9 cm ir $\sqrt{41}$ cm — neatitinka sąlygos;
   arba 9 cm; tada kitos dvi penkiakampio kraštinės turėtų būti 3 cm ir $\sqrt{101}$ cm arba 5 cm ir $\sqrt{65}$ cm — neatitinka sąlygos.



Kai stačiakampio plotis yra 9 cm, tai nuo stačiakampio nukirpus vieną kampą likusio pločio dalis turi būti 3 cm, likusio ilgio dalis — 5 cm, o penktosios penkiakampio kraštinės ilgis — 10 cm (kiti atvejai netenkina uždavinio sąlygos). Tada penkiakampio plotas lygus stačiakampio, kurio kraštinių ilgiai yra 13 cm ir 9 cm, ir stačiojo trikampio, kurio statinių ilgiai yra 6 cm ir 8 cm, plotų skirtumui, t. y.: $S = 13 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 93\,(\text{cm}^2)$.

Atsakymas. 93 cm^2.

64. a) $c = \frac{x-a}{2}$.

b) Tako plotas lygus vejos ir baseino plotų skirtumui, t. y. $S_1 = xy - ab = x(b + 2c) - ab = xb + 2x\frac{x-a}{2} - ab = xb + x^2 - xa - ab = (xb + x^2) - (xa + ab) = x(x+b) - a(x+b) = (x+b)(x-a)$.

c) $S_2 = a \cdot b = (x - 2c)(y - 2c)$.

Programoje, pagal kurią buvo rašomas vadovėlis, nėra numatyta nagrinėti geometrinę progresiją. Todėl šio skyrelio su silpnesniais mokiniais galima nenagrinėti iš viso. Bet sudėtiniai procentai siejasi su geometrine progresija, užtat yra gera proga supažindinti mokinius su skaičių sekomis, vadinamomis geometrinėmis progresijomis. Juo labiau, kad geometrinės progresijos n pirmųjų narių sumos formulė labai supaprastina sprendimą daugelio uždavinių, kuriuose reikia skaičiuoti pakankamai didelio kiekio dėmenų sumą.
Pastaba. Geometrinė progresija bus nagrinėjama vidurinėje mokykloje išplėstiniame kurse.

Pakartoti:
skaičių sekas, vadinamas aritmetinėmis progresijomis;
sekos n-tojo nario formulę;
skaičiaus apvalinimą iki nurodyto skyriaus.

Išmokti:
atpažinti geometrinę progresiją;
suprasti, kaip gaunamos geometrinės progresijos;
užrašyti kelis pirmuosius geometrinės progresijos narius, kai žinomas pirmasis narys ir vardiklis;
remiantis geometrinės progresijos n-tojo nario formule apskaičiuoti bet kurį jos narį;
remiantis geometrinės progresijos pirmųjų n narių sumos formule apskaičiuoti jų sumą.

Šiame skyrelyje:
1. Primenamas sudėtinių procentų uždavinių skaičiavimo algoritmas, kurio esmė — tam tikro dydžio pradinės reikšmės dauginimas vis iš to paties pastovaus daugiklio. Šis skaičius priklausomai nuo konkrečios situacijos yra arba $1-\frac{p}{100}$, arba $1+\frac{p}{100}$ (čia p — sudėtiniai procentai).
2. Pateikiamas sekos, kaip geometrinės progresijos, užrašymo pavyzdys ir paaiškinama, kaip gaunama tokia seka.
3. Apibrėžiama geometrinė progresija:

Nelygių nuliui skaičių seka (b_n), kurios kiekvienas narys, pradedant antruoju, lygus prieš jį einančiam nariui, padaugintam iš pastovaus nelygaus nuliui skaičiaus (tas skaičius vadinamas geometrinės progresijos vardikliu), vadinama geometrine progresija.

4. Neprivalomoje medžiagoje išvedama geometrinės progresijos n-tojo nario bei pirmųjų n narių sumos formulės, kartu pateikiant ir šių formulių taikymo pavyzdžius.
Nurodymai. 1) Šios abi formulės naudojamos realaus turinio uždaviniams spręsti, kai skaičius n yra pakankamai didelis.
2) Visus vadovėlyje pateiktus uždavinius galima išspręsti ir nežinant šių formulių, o taikant sudėtinių procentų skaičiavimo algoritmą, todėl nereikėtų reikalauti šių formulių įsiminti.
3) Nepatartina spręsti formalių geometrinės progresijos formulių taikymo uždavinių. Šios formulės turi tarnauti tiek, kiek palengvina skaičiavimus sprendžiant realiojo turinio uždavinius.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

65–75 uždaviniai yra teminiai, o 76–85 — kartojimo.

50–55

65. 10 000 Lt, 10 800 Lt, 11 664 Lt, 12 597,12 Lt.

66. Skaičiuodami gauname:
a) $3{,}0\cdot10^4$ m^3; $3{,}3\cdot10^4$ m^3; $3{,}63\cdot10^4$ m^3; $3{,}993\cdot10^4$ m^3; $4{,}3923\cdot10^4$ m^3;
b) $3{,}0\cdot10^4$ m^3; $3{,}36\cdot10^4$ m^3; $3{,}7632\cdot10^4$ m^3; $4{,}214784\cdot10^4$ m^3; $4{,}72055808\cdot10^4$ m^3.
Kadangi pradinis medienos kiekis pateiktas dešimties tūkstančių tikslumu, todėl gautą rezultatą tikslinga suapvalinti taip pat dešimties tūkstančių tikslumu:
a) $3{,}0\cdot10^4$ m^3; $3{,}3\cdot10^4$ m^3; $\approx 3{,}6\cdot10^4$ m^3; $\approx 4{,}0\cdot10^4$ m^3; $\approx 4{,}4\cdot10^4$ m^3;
b) $3{,}0\cdot10^4$ m^3; $\approx 3{,}4\cdot10^4$ m^3; $\approx 3{,}8\cdot10^4$ m^3; $\approx 4{,}2\cdot10^4$ m^3; $\approx 4{,}7\cdot10^4$ m^3.

67. a) $40\,000\cdot0{,}8^3=20\,480$ (Lt); b) 16 384 Lt; c) 13 107,2 Lt; d) 10 485,76 Lt.

68. a) $750\cdot0{,}85^2=542$ (mm Hg); b) 392 mm Hg;
c) 240 mm Hg; d) 148 mm Hg.

69. a) $50\,000\cdot1{,}05^5\approx63\,800$; b) 81 400.

70. a) Sakykime, kad laimėjimo suma x Lt. Po ketverių metų šeimai buvo likę $x\cdot0{,}75^4$ Lt. Pagal sąlygą: $x\cdot0{,}75^4=126\,562{,}5$; $x=400\,000$ (Lt).
b) Po dešimties metų šeimai bus likę $400\,000\cdot0{,}75^{10}\approx22\,525{,}41$ (Lt).
c) Per ketverius pirmuosius metus šeima išleido $400\,000-126\,562{,}5=273437{,}5$ (Lt). Po penkerių metų šeimai liks $400\,000\cdot0{,}75^5\approx94\,921{,}88$ (Lt). Vadinasi, per penkerius pirmuosius metus šeima išleido $400\,000-94\,921{,}88=$ $=305\,078{,}12$ (Lt).

71. $8000(1-\frac{50}{100})^t=62{,}5$; $0{,}5^t=0{,}0078125$; $t=7$.
Atsakymas. Po 7 metų.

72. a) $500\cdot 4^5=512\,000$; b) 614 400.

Pastaba. Šiame uždavinyje „keturis kartus“ galima keisti į „300%“.

73. a) Pagal sąlygą paskesniojo trikampio kraštinė yra pirmesniojo vidurinioji linija. Antrojo trikampio kraštinės ilgis yra $\frac{32}{2}=16$ (cm), trečiojo — $\frac{16}{2}=8$ (cm), ketvirtojo — $\frac{8}{2}=4$ (cm) ir t. t. Tada pirmojo trikampio perimetras $P_1=3\cdot 32=96$ (cm), antrojo — $P_2=3\cdot 16=48$ (cm), trečiojo — $P_3=3\cdot 8=24$ (cm), ketvirtojo — $P_4=3\cdot 4=12$ (cm) ir t. t. Užrašome trikampių perimetrų seką: 96; 48; 24; 12; ... Kadangi kiekvienas šios sekos narys, pradedant antruoju, gaunamas prieš jį esantį narį padauginus iš $\frac{1}{2}$, tai ši seka yra geometrinė progresija.
b) 50%.
c) Galima spręsti dvejopai:
1) a) punkte aprašytu būdu gautą seką pratęsiame iki septintojo nario: 96; 48; 24; 12; 6; 3; 1,5; ...
2) taikome geometrinės progresijos n-tojo nario formulę:
$P_7=96\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=1{,}5$ (cm).
d) Kaip ir punkte c) galima spręsti dvejopai:
1) $96+48+24+12+6+3+1{,}5=190{,}5$ (cm);
2) pagal formulę $S_n=\frac{b_nq-b_1}{q-1}$ turime: $S_7=\frac{1{,}5\cdot\frac{1}{2}-96}{\frac{1}{2}-1}=190{,}5$ (cm).
Atsakymas. b) 50%; c) 1,5 cm; d) 190,5 cm.

74. a) *I būdas.* Darbininko atlyginimas buvo:
sausio mėnesį: 750 Lt,
vasario mėnesį: $750\left(1+\frac{2}{100}\right)=750\cdot 1{,}02=765$ (Lt),
kovo mėnesį: $765\cdot 1{,}02=780{,}3$ (Lt),
balandžio mėnesį: $780{,}3\cdot 1{,}02=795{,}906\approx 795{,}91$ (Lt),
gegužės mėnesį: 811,82 Lt,
birželio mėnesį: 828,06 Lt,
liepos mėnesį: 844,62 Lt,
rugpjūčio mėnesį: 861,51 Lt,
rugsėjo mėnesį: 878,74 Lt,
spalio mėnesį: 896,32 Lt,
lapkričio mėnesį: 914,25 Lt,
gruodžio mėnesį: 932,53 Lt.
Per metus darbininkas uždirbo:
$750+765+780{,}3+795{,}91+811{,}82+828{,}06+844{,}62+861{,}51+878{,}74+$
$+896{,}32+914{,}25+932{,}53=10\,059{,}06$ (Lt);
II būdas. Darbuotojo uždarbis per metus atitinka geometrinės progresijos, kurios $b_1=750$, $q=1+\frac{2}{100}=1{,}02$, pirmųjų dvylikos narių sumą: $S_{12}=\frac{b_{12}\cdot q-b_1}{q-1}$. Dvyliktasis narys $b_{12}=750\cdot 1{,}02^{11}\approx 932{,}53$. Tada $S_{12}=\frac{932{,}53\cdot 1{,}02-750}{1{,}02-1}\approx 10\,059{,}03$ (Lt).
Pastaba. Galima atskirai nario b_{12} ir neskaičiuoti, o iškart duomenis įrašyti į geometrinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulę. Turėsime: $S_{12}=\frac{750\cdot 1{,}02^{11}\cdot 1{,}02-750}{1{,}02-1}=\frac{750(1{,}02^{12}-1)}{0{,}02}\approx 10\,059{,}07$ (Lt). (Skirtingas atsakymas yra palyginti grubaus apvalinimo pasekmė.)
b) 10 951,47 Lt.

75. a) $\approx 1113{,}5$ kWh; b) $\approx 1086{,}2$ kWh.
Pastaba. Šeimos naudojamas buitinis elektros skaitiklis rodo suvartotą elektros energijos kiekį kilovatvalandėmis (kWh) dešimtosios tikslumu.

76. a) $4000\cdot 1{,}025^{2t}$; b) $4000\cdot 1{,}0125^{4t}$.

77. a) 5%; b) 6000 Lt; c) 7657,69 Lt; 8864,73 Lt.

78. a) Namų turto draudimo įmoka netaikant nuolaidos yra $151\,000\cdot\frac{0{,}2}{100}=302$ (Lt). Mažiausia įmoka draudžiant turtą bus tada, kai bus taikoma didžiausia galima nuolaida, t. y. 50%. Taigi mažiausia įmoka bus $302\cdot\frac{50}{100}=151$ (Lt);
b) 160 Lt; c) 175 Lt; d) 200 Lt.

79. a) 436 800 Lt; b) 700 000 Lt; c) 252 000 Lt; d) 1 148 000 Lt.

80. (1; 0), (2; 3).

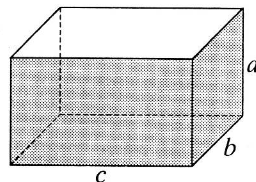
81. a) -27; b) -60; c) 2.

82. a) Sprendinių nėra; b) $(-\infty; -1)$.

83. a) 4,5; b) $75°$.

84. *I būdas.* Vienos plytelės plotas lygus $\frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,(\mathrm{dm}^2)$. Aikštelės plotas lygus $\frac{20^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 100\sqrt{3}\,(\mathrm{dm}^2)$. Aikštelei iškloti reikia $100\sqrt{3} : \frac{\sqrt{3}}{4} = 400$ (plytelių).
II būdas. Pastebėkime, kad trikampėlių kiekvienoje eilėje skaičiai sudaro aritmetinę progresiją, kurios $a_1 = 1$, $d = 2$, $a_{20} = 39$. Reikia apskaičiuoti šios aritmetinės progresijos pirmųjų 20-ies narių sumą: $S_{20} = \frac{(1+39)\cdot 20}{2} = 400$.
Atsakymas. **D**.

85. $S_{\text{pav}} = bc + 2(ac + ab)$.



Imkime $a = 2\,\mathrm{dm}$. Tada arba $b = 2\,\mathrm{dm}$, $c = 9\,\mathrm{dm}$, $S_{\text{pav}} = 62\,\mathrm{dm}^2$, arba $b = 3\,\mathrm{dm}$, $c = 6\,\mathrm{dm}$, $S_{\text{pav}} = 54\,\mathrm{dm}^2$.
Imkime $a = 3\,\mathrm{dm}$. Tada arba $b = 2\,\mathrm{dm}$, $c = 6\,\mathrm{dm}$, $S_{\text{pav}} = 60\,\mathrm{dm}^2$, arba $b = 3\,\mathrm{dm}$, $c = 4\,\mathrm{dm}$, $S_{\text{pav}} = 54\,\mathrm{dm}^2$.
Imkime $a = 4\,\mathrm{dm}$. Tada $b = 3\,\mathrm{dm}$, $c = 3\,\mathrm{dm}$, $S_{\text{pav}} = 57\,\mathrm{dm}^2$.
Imkime $a = 6\,\mathrm{dm}$. Tada $b = 2\,\mathrm{dm}$, $c = 3\,\mathrm{dm}$, $S_{\text{pav}} = 66\,\mathrm{dm}^2$.
Imkime $a = 9\,\mathrm{dm}$. Tada $b = 2\,\mathrm{dm}$, $c = 2\,\mathrm{dm}$, $S_{\text{pav}} = 76\,\mathrm{dm}^2$.
Taigi dėžės paviršiaus plotas yra mažiausias, kai jos matmenys yra $6\,\mathrm{dm} \times 3\,\mathrm{dm} \times 2\,\mathrm{dm}$ arba $4\,\mathrm{dm} \times 3\,\mathrm{dm} \times 3\,\mathrm{dm}$.

Kitas sprendimas. Nesinaudokime brėžiniu ir samprotaukime taip. Skaičių 36 galima išskaidyti trimis būdais, tenkinančiais sąlygą: $36 = 2 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 3 \cdot 3 \cdot 4$. Sakykime, kad jau pasirinkome skaidinį $2 \cdot 2 \cdot 9$. Kadangi $S_{\text{pav}} = 2(ab + ac + bc) - bc$, tai skliaustuose reiškinys bus tas pats, kad ir kaip matmenims a, b ir c priskirtume reikšmes 2, 2 ir 9, o didžiausia bc reikšmė yra 18, taigi mažiausia S_{pav} reikšmė $2(4 + 18 + 18) - 18 = 62$. Jeigu pasirenkame kraštines 2, 3 ir 6, tai didžiausia bc reikšmė yra 18, taigi šiuo atveju mažiausias $S_{\text{pav}} = 2(6 + 12 + 18) - 18 = 54$. Jeigu kraštinės 3, 3 ir 4, šiuo atveju gautume mažiausią $S_{\text{pav}} = 2(9 + 12 + 12) - 12 = 54$.

2. FUNKCIJŲ GRAFIKAI

Naujuosiuose matematikos vadovėliuose daug dėmesio skiriama funkcijos sampratai ir funkcijų grafikams. Šiame skyriuje pagrindinis dėmesys skiriamas anksčiau nenagrinėtų funkcijų $f(x) = ax^3$, $f(x) = a\sqrt{x}$, $f(x) = a\sqrt[3]{x}$ grafikų braižymui. (9 klasėje buvo braižomi grafikai funkcijų $f(x) = kx$, $f(x) = kx + b$, $f(x) = \frac{k}{x}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$; žr. Matematika 9, I dalis, 1 ir 2 skyriai.)

Šio skyriaus pagrindinius tikslus trumpai galima nusakyti taip:

- toliau plėtoti funkcijos sąvoką;
- mokyti braižyti anksčiau nenagrinėtų funkcijų grafikus;
- remiantis funkcijos grafikais ir algebriškai tirti funkcijų savybes;
- grafiškai spręsti lygtis ir nelygybes.

Nurodymai. 1) Funkcijų nagrinėjimas ir jų grafikų braižymas neturi būti savitikslis. Reikia siekti, kad mokiniai suprastų, kam viso to reikia. Todėl vadovėlyje pateikiama nemažai užduočių, iliustruojančių funkcijų savybių ir jų grafikų taikymus. Mokant nubraižyti funkcijų $f(x) = ax^3$, $f(x) = a\sqrt{x}$, $f(x) = a\sqrt[3]{x}$ grafikus galima geometriškai spręsti kubines, iracionaliąsias lygtis ir nelygybes, nors algebrinis tų lygčių ir nelygybių sprendimas dažnai nėra lengvas ir pagrindinėje mokykloje nenagrinėjamas. Šių tikslų ir siekiama 2.1–2.2 skyreliuose.

2) Trečiajame skyriaus skyrelyje (2.3) mokoma braižyti funkcijos $y = |f(x)|$ grafiką. Mokant braižyti tokių funkcijų grafikus galima grafiškai spręsti lygtis ir nelygybes su moduliais.

3) Ketvirtasis skyrelis (2.4) skirtas nagrinėti tik su stipriausiais mokiniais. Skyrelyje mokoma braižyti sudėtingų funkcijų grafikus remiantis paprastesnių funkcijų grafikais. Apskritai skyrelis daugiau teorinis, jame nėra taikomojo pobūdžio uždavinių.

4) Einant šią medžiagą galima tobulinti darbo su skaičiuokliu įgūdžius: mokyti skaičių kelti bet kuriuo natūraliuoju laipsniu ir traukti bet kurio laipsnio šaknį.

5) Esant galimybei galima pasiūlyti mokiniams grafikus braižyti ir kompiuteriu.

Minimalus lygmuo:

1. Gebėti atpažinti funkcijas $f(x) = ax^3$, $f(x) = a\sqrt{x}$ ir nubraižyti jų grafikus.
2. Remiantis funkcijos $y = f(x)$ grafiku gebėti nubraižyti funkcijos $y = |f(x)|$ grafiką.

Pagrindinis lygmuo:

3. Gebėti nusakyti pagrindines funkcijų $f(x) = ax^3$, $f(x) = \sqrt{x}$ savybes.
4. Grafiškai spręsti trečiojo laipsnio ir iracionaliąsias lygtis ir nelygybes.
5. Grafiškai spręsti lygtis ir nelygybes su moduliais.

Aukštesnis lygmuo:

6. Atpažinti funkciją $f(x) = x^n$, $n \in \boldsymbol{N}$, ir mokėti nubraižyti jos grafiką bei nusakyti funkcijos savybes, kai n — lyginis ir kai n — nelyginis.
7. Mokėti nubraižyti funkcijos $f(x) = a\sqrt[3]{x}$ grafiką ir žinoti jos savybes.
8. Mokėti nubraižyti funkcijos $y = f(x + a) + b$ grafiką remiantis funkcijos $y = f(x)$ grafiku.

2.1. Funkcija $f(x) = ax^3$

Teorinę skyrelio medžiagą galima suskirstyti į tris dalis:
1) kartojimas — primenant ankstesnėse klasėse nagrinėtų funkcijų grafikus;
2) funkcijos $f(x) = ax^3$ tyrimas — grafiko braižymas ir savybių nagrinėjimas;
3) funkcijos $f(x) = x^n$, $n \in \boldsymbol{N}$, tyrimas — grafiko braižymas ir savybių nagrinėjimas.

Nurodymai. 1) Nemažai laiko reikėtų skirti kartojimui: priminti mokiniams (ypač silpnesniems), kaip braižomi grafikai funkcijų $f(x) = kx$, $f(x) = kx+b$, $f(x) = \frac{k}{x}$, $f(x) = ax^2+bx+c$, priminti tų funkcijų savybes. Kartojant vertėtų prisiminti sąvokas: funkcijos apibrėžimo sritis, reikšmių sritis, didėjimo intervalai, mažėjimo intervalai, lyginė funkcija, nelyginė funkcija, funkcija, kuri nėra nei lyginė, nei nelyginė. Vertėtų priminti, kaip rasti taškus, kuriuose funkcijos grafikas kerta koordinačių ašis. Vadovėlyje nėra daug pratimų, skirtų kartojimui, todėl silpnesniems mokiniams reikėtų jų pateikti (jų galima rasti ankstesniųjų klasių vadovėliuose, uždavinynuose arba sugalvoti pačiam mokytojui).

2) Siekite, kad nubraižyti funkcijos $f(x) = ax^3$ grafiką išmoktų visi mokiniai. Pilkajame fone esančią medžiagą (funkcija $f(x) = x^n$, $n \in \boldsymbol{N}$) gali suprasti ir vidutinio lygio mokiniai. Nebūtina pilkajame fone esančią medžiagą nagrinėti su visais mokiniais, bet nubraižyti grafikus funkcijų, pavyzdžiui, $f(x) = x^4$, $f(x) = -x^4$, $f(x) = x^5$, $f(x) = -x^5$, $f(x) = 2x^4$, $f(x) = -2x^4$, $f(x) = \frac{1}{2}x^4$, $f(x) = -\frac{1}{2}x^4$, galima pasiūlyti ir visiems mokiniams.

3) Skirkite daug dėmesio grafiniam lygčių ir nelygybių sprendimui. Vadovėlyje pateikti kubinių lygčių ir nelygybių pavyzdžiai. Todėl vertėtų, ypač su silpnesniais mokiniais, prisiminti ir kvadratinių bei tiesinių lygčių grafinį sprendimą, įsigilinant į jo esmę.

Pakartoti:

funkcijos sąvoką ir jos reiškimo būdus;
kas yra funkcijos grafikas ir kaip jį galima nubraižyti;
kas yra funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritys;
kokia funkcija vadinama lygine, kokia — nelygine; kokia savybe pasižymi lyginės, kokia — nelyginės funkcijos grafikas;
skaičiaus kėlimą natūraliuoju laipsniu;
kas yra lygties ir nelygybės sprendiniai;
ką parodo dviejų funkcijų grafikų susikirtimo taško koordinatės;
kaip grafiškai sprendžiamos lygtys ir nelygybės.

Išmokti:

atpažinti funkciją $f(x) = ax^3$, $a \neq 0$, ir nubraižyti jos grafiką;
remiantis koeficiento a ženklu nustatyti, kuriuose ketvirčiuose yra funkcijos $f(x) = ax^3$ grafikas;
nustatyti pagrindines funkcijos $f(x) = ax^3$ savybes;
grafiškai spręsti kubines lygtis ir nelygybes.

Šiame skyrelyje:

1. Pateikiami anksčiau nagrinėtų funkcijų grafikų pavyzdžiai $y = 2x$, $y = -2x - 2$, $y = -\frac{1}{x}$, $y = x^2 - 2x$, siekiant pakartoti anksčiau nagrinėtas funkcijas ir jų grafikus.
Nurodymas. Nustatyti, kiek laiko skirti praeitos medžiagos kartojimui, mokytojas gali pateikęs užduotį mokiniams.
Užduoties pavyzdys. Nubraižykite grafikus funkcijų: $y = -\frac{1}{2}x$, $y = x + 3$, $y = \frac{2}{x}$, $y = -x^2 + 2x + 2$. Vertėtų panagrinėti ir nubraižytų funkcijų savybes (apibrėžimo ir reikšmių sritis, didėjimą, mažėjimą, lyginumą, kur kerta koordinačių ašis).
2. Įvedama anksčiau nenagrinėta funkcija $f(x) = ax^3$ ($a \neq 0$):
   - funkcija užrašoma formule,
   - pateikiamas tokios funkcijos pavyzdys — kubo tūrio priklausomybė nuo jo kraštinės ilgio; siūloma prisiminti, kaip siejasi rutulio tūris ir jo spindulio ilgis, pastebint, kad ta priklausomybė yra kubinė,
   - aptariama funkcijos apibrėžimo sritis ir algebriškai įrodoma, kad funkcija yra nelyginė.
3. Nagrinėjamas atskiras funkcijos $f(x) = ax^3$ atvejis — paprasčiausias atvejis, kai $a = 1$, t. y. nagrinėjama funkcija $f(x) = x^3$:
   - sudaroma reikšmių lentelė ir ja remiantis nubraižomas grafikas; grafikas pavadinamas *kubine parabole*,
   - nagrinėjamos nubraižytos kubinės parabolės savybės. Savybes siūloma išvardyti patiems mokiniams atsakant į klaustuku pažymėtus klausimus,
   - pasakoma, kad kubine parabole vadinamas grafikas bet kokios funkcijos, kurios pavidalas yra $f(x) = ax^3$,
   - siūloma mokiniams nubraižyti keletą kubinių parabolių imant *teigiamas a* reikšmes, siekiant, kad mokiniai atkreiptų dėmesį į tai, kuriuose ketvirčiuose parabolės išsidėstę.
4. Analogiškai nagrinėjama funkcija imant *neigiamas a* reikšmes.
5. Pateikiami scheminiai kubinių parabolių grafikai, iliustruojantys, kuriuose ketvirčiuose priklausomai nuo a ženklo yra kubinė parabolė.
Nurodymai. 1) Pasiūlykite mokiniams surasti dešiniajame brėžinyje esančią klaidą (vietoj $-a$ turi būti a).
2) Savybę, kad kubinė parabolė eina per taškus $(0; 0)$, $(1; a)$, $(-1; -a)$, mokiniai turi „atrasti“ atlikdami 2 ir 3 užduotis.
6. Kaip neprivaloma medžiaga nagrinėjama funkcija $f(x) = ax^n$, $n \in N$, imant atskirą jos atvejį, kai $a = 1$.
Nurodymai. 1) Laipsninė funkcija bus nagrinėjama vidurinėje mokykloje, bet medžiaga nėra sunki, todėl ją galima nagrinėti ir su visais mokiniais.
2) Reikėtų atkreipti mokinių dėmesį į funkcijų $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ ir $h(x) = x^3$ reikšmes intervale $(0; 1)$ pastebint, kad $x > x^2 > x^3$.
3) Teorinę medžiagą galima ir praplėsti imant a reikšmes, nelygias vienetui — braižant grafikus funkcijų $f(x) = ax^n$, kai $a > 0$ ($a \neq 1$) ir kai $a < 0$. Tuo atveju reikėtų pateikti ir uždavinių.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

86–94 uždaviniai yra teminiai, kiti — kartojimo.

8–10, 37a,b,e,f, 56, 57, 60, 62, 64

86. a), d) — kubinė parabolė yra I ir III, o b) ir c) — II ir IV ketvirčiuose.

87. a) Kadangi kubinė parabolė $y = kx^3$ eina per tašką $M(2; 16)$, tai turi būti teisinga lygybė $16 = k \cdot 2^3$; iš čia $k = 2$;
b) -2; c) 81; d) -54.

88. *I būdas.* Remiamės duotos funkcijos grafiku.
II būdas. Remiamės duotos funkcijos savybėmis: $f(x) = ax^3$ — funkcija didėja visoje apibrėžimo srityje, kai $a > 0$, ir mažėja visoje apibrėžimo srityje, kai $a < 0$; $f(x) = kx + b$ — funkcija didėja visoje apibrėžimo srityje, kai $k > 0$, ir mažėja visoje apibrėžimo srityje, kai $k < 0$.

89. a) $x \approx 1{,}7$; b) $x \approx 1{,}5$; c) $x \approx 1{,}3$; d) $x = -1$.

90. a), b), c) — funkcija yra nelyginė, nes su kiekviena x reikšme $f(-x) = -f(x)$; d), f) — funkcija yra lyginė, nes su kiekviena x reikšme $f(-x) = f(x)$; e) — funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.
Pastaba. Silpnesnieji moksleiviai užduotį galėtų spręsti remdamiesi duotų funkcijų grafikais. Tik prieš tai reikėtų prisiminti, jog lyginės funkcijos grafikas yra simetriškas ordinačių ašies atžvilgiu, o nelyginės — koordinačių pradžios taško atžvilgiu.

91. a), e) — sprendinių nėra; b), c), d) — vienas sprendinys; f) — trys sprendiniai.

92. a) $(1; +\infty)$; b) $(-2; +\infty)$; c) $(2; +\infty)$; d) $\approx (1{,}4; +\infty)$; e) $\approx (-\infty; 1{,}4)$; f) $(2; +\infty)$; g) $(-\infty; -2)$, $(0; 2)$; h) $(-\infty; -2)$, $(0; 2)$.

93. Kai $0 < x < 1$, tai $x^3 < x^2 < x$; kai $x > 1$, tai $x^3 > x^2 > x$. Remdamiesi šiomis savybėmis turime:
a) $0{,}2^3 < 0{,}2^2 < 0{,}2$; $0{,}9^3 < 0{,}9^2 < 0{,}9$; $0{,}5^3 < 0{,}5^2 < 0{,}5$;
$-0{,}5^3 > -0{,}5^2 > -0{,}5$; $-0{,}9^3 > -0{,}9^2 > -0{,}9$; $1{,}2^3 > 1{,}2^2 > 1{,}2$.
Taigi skaičiai išsidėstę taip: $-0{,}9$; $(-0{,}9)^3$; $-0{,}5$; $(-0{,}5)^3$; $(0{,}2)^3$; $0{,}2$; $(-0{,}5)^2$; $(0{,}9)^2$; $1{,}2$; $(1{,}2)^2$; $(1{,}2)^3$; $(3{,}5)^2$;
b) $(2{,}6)^3$; $(-2{,}6)^2$; $2{,}6$; $0{,}7$; $(-0{,}7)^2$; $(0{,}7)^3$; $(-0{,}13)^3$; $-0{,}13$.

94. a) 5; b) 2; c) 4; d) 3.

95. a) *I būdas.* Kadangi tiesės $y = kx + b$ krypties koeficientas $k = 1$, tai $y = x + b$. Į šią lygtį įrašę duoto taško $M(3; 2)$ koordinates rasime b reikšmę: $2 = 3 + b$, $b = -1$. Taigi reikės nubrėžti tiesę $y = x - 1$.
II būdas. Koeficientas k parodo, kiek pakinta funkcijos reikšmė, argumentą padidinus vienu vienetu. Tuo remiantis galima rasti antrąjį, tiesei priklausantį tašką. Jei tiesė eina per tašką , kurio koordinatės yra $(x; y)$, tai ji eis ir per tašką, kurio koordinatės yra $(x + 1; y + k)$. Turime, kad tiesė eina per tašką $M(3; 2)$, $k = 1$. Tada ši tiesė eis ir per tašką, kurio koordinatės yra $(3 + 1; 2 + 1)$, t. y. $(4; 3)$;
b) $y = -2x + 8$; c) $y = 3x - 7$; d) $y = 2$; e) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

96. a) Turistas 15 km važiavo lyguma, 10 km kilo į kalną ir 20 km leidosi nuo kalno; b) 2 h; c) per pirmąsias pusantros valandos turistas nuvažiavo maždaug 21 km, o per paskutinę valandą — maždaug 24 km; d) turistas lyguma važiavo 18 km/h greičiu, į kalną — $8\frac{4}{7}$ km/h greičiu, o nuo kalno — 40 km/h greičiu; e) 18 km/h.

97. a) $f(1)-f(2) = \frac{1}{1}-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $f(1)\cdot f(2) = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $f(1)-f(2) = f(1)\cdot f(2)$.
Analogiškai įrodomi ir kiti punktai.
Pastaba. Atkreipkite dėmesį, kad d) punkte $n \in D(f)$, t. y. $n \neq 0$.

98. e) $f(1 + x) + g(1 - x) = \frac{(1+x)^2-(1+x)}{2} + \frac{(1-x)-(1-x)^2}{2} = \frac{(1+x)(1+x-1)}{2} + \frac{(1-x)(1-(1-x))}{2} = \frac{x(1+x)+x(1-x)}{2} = \frac{x+x^2+x-x^2}{2} = \frac{2x}{2} = x$.

99. Norint rasti taško, kuriame grafikas kerta y ašį, ordinatę, reikia apskaičiuoti funkcijos reikšmę taške $x = 0$, t. y. $f(0)$; norint rasti bendrų grafiko ir x ašies taškų abscises, reikia išspręsti lygtį $f(x) = 0$.
Atsakymas. a) $(0; -4)$, $\left(\frac{2}{3}; 0\right)$; b) $(0; -4)$, $(-2; 0)$, $(1; 0)$; c) $(0; 3)$, Ox ašies nekerta; d) $(0; 14)$, $(4 - \sqrt{2}; 0)$, $(4 + \sqrt{2}; 0)$; e) taške $(0; 9)$ grafikas kerta Oy ašį, o taške $(1{,}5; 0)$ grafikas liečia Ox ašį; f) $(0; -1{,}5)$, Ox ašies nekerta.

100. a) ir b) punktai įrodomi analogiškai kaip pateiktame pavyzdyje. Kiek sudėtingesnis yra punktas c).
c) Imkime bet kuriuos x_1 ir x_2. Toliau nagrinėkime du atvejus:
1) tarkime, kad $x_1 < x_2 < 2$. Tada $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - 4x_2 + 7 - (x_1^2 - 4x_1 + 7) = x_2^2 - 4x_2 + 7 - x_1^2 + 4x_1 - 7 = x_2^2 - x_1^2 - 4(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 4(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 4)$. Kai $x_1 < x_2 < 2$, tai $(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 4) < 0$, nes $x_2 - x_1 > 0$, o $x_2 + x_1 - 4 < 0$. Vadinasi, intervale $(-\infty; 2)$ funkcija $f(x) = x^2 - 4x + 7$ mažėja;
2) tarkime, kad $2 < x_1 < x_2$. Tada $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 - 4(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 4) > 0$, nes $x_2 - x_1 > 0$ ir $x_2 + x_1 - 4 > 0$ ($x_2 > 2$, $x_1 > 2$, tai $x_2 + x_1 > 4$ ir $x_2 + x_1 - 4 > 0$). Vadinasi, intervale $(2; +\infty)$ funkcija $f(x) = x^2 - 4x + 7$ didėja.

101. a) 2519,42 Lt; b) 2720,98 Lt; c) 2938,66 Lt; d) 3173,75 Lt.
Pastaba. Akylesni mokiniai turbūt pastebės, kad norint išspręsti šį uždavinį pakanka bet kurių dviejų iš sąlygoje duotų dydžių: arba $p = 8\%$ ir $S = 2000$ Lt, arba $p = 8\%$ ir $S_2 = 2332{,}8$ Lt, arba $S = 2000$ Lt ir $S_2 = 2332{,}8$ Lt.

102. $15\,000 \cdot \frac{0,71}{100} + 12\,000 \cdot \frac{1,03}{100} = 230,1$ (Lt).

103. Vienos tonos tepalų akcizo mokesčio tarifas yra 240 Lt;
a) 18 288 Lt; b) 25 080 Lt.

104. a) *I būdas.* Sakykime, kad prekės kaina be PVM yra x Lt. Tada PVM yra $0,18x$ Lt, o prekės mažmeninė kaina yra $(x + 0,18x)$ Lt. Pagal sąlygą $x + 0,18x = 15,25$, $x \approx 12,92$ Lt; $0,18 \cdot 12,92 \approx 2,33$ (Lt).
II būdas. Prisiminę, kad prekės kaina be PVM atitinka 100%, PVM atitinka 18%, o prekės mažmeninė kaina atitinka 118%, galima sudaryti atitinkamą proporciją (žr. dešinėje).
Taigi PVM yra 2,33 Lt, o prekės kaina be PVM $15,25 - 2,33 = 12,92$ (Lt).

15,25 Lt — 118%,
x Lt — 18%,
$x \approx 2,33$ (Lt).

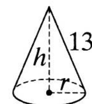
b) Prekės mažmeninė kaina yra 99,97 Lt, o prekės kaina be PVM yra 84,72 Lt.
c) Prekės mažmeninė kaina yra 18 Lt, o PVM yra 2,75 Lt.
d) PVM yra 30,51 Lt, o prekės kaina be PVM yra 169,48 Lt.

105. *I būdas.* Sakykime, kad akcijos nominalioji vertė yra A Lt. Sprendžiame lygtį:
a) $A + 0,04A = 52$; $A = 50$ (Lt); b) $A + 0,04A = 31,2$; $A = 30$ (Lt).
II būdas. Akcijos nominaliąją vertę galima rasti iš proporcijos:

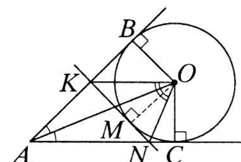
a) 52 Lt — 104%, x Lt — 100%, $x = 50$ (Lt); b) 31,2 Lt — 104%, x Lt — 100%, $x = 30$ (Lt).

Atsakymas. a) 50 Lt; b) 30 Lt.

106. a) Pagal sąlygą sudarome lygčių sistemą: $\begin{cases} h - r = 7, \\ h^2 + r^2 = 13^2. \end{cases}$
Iš čia $h = 12$ dm, $r = 5$ dm. Tada $S_{\text{pav}} = \pi r^2 + \pi r l = \pi r(r + l) = 5\pi(5 + 13) = 90\pi \approx 282,6$ (dm^2);
b) $V = 100\pi \approx 314$ dm^3.



107. Reikia apskaičiuoti kampo KON didumą. $\angle KON = \angle KOM + \angle MON$.
Į kampą įbrėžto apskritimo centras yra kampo pusiaukampinėje. Kampo kraštinės yra apskritimo liestinės, o į lietimosi taškus nubrėžti spinduliai yra statmeni liestinėms. Kadangi $BK = KM$ (apskritimo liestinių, išeinančių iš vieno taško, atkarpų savybė), o $BO = OM = R$, tai $\triangle OBK = \triangle OMK$ (pagal 3 kraštines). Analogiškai įsitikiname, kad $\triangle OMN = \triangle OCN$.
Taigi $\angle KON = \angle KOM + \angle MON = \frac{1}{2}\angle BOM + \frac{1}{2}\angle MOC = \frac{1}{2}(\angle BOM + \angle MOC) = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}(180° - 50°) = 65°$.
Atsakymas. 65°.



108. a) Ne; b) taip.
Nurodymas. Suvienodinkite ilgio matavimo vienetus ir patikrinkite, ar atitinkamų kraštinių ilgių santykiai yra lygūs.

109. a) $(5; -2)$; b) $\left(12; -9\frac{1}{3}\right)$.
Nurodymas. Patogu lygčių sistemą spręsti sudėties būdu, prieš tai pirmąją lygtį padauginus iš: a) -4; b) -2.

110. a) $\frac{1}{ab}$; b) $\frac{c}{\frac{1}{a}} = \frac{ac}{1}$; c) $\frac{y}{x}$; d) $\frac{2}{a}$; e) $\frac{2-3x}{x^2}$; f) $\frac{5a+2}{a^3}$; g) $\frac{ab+1}{b}$; h) $\frac{1-x^2}{x}$.

111. *I būdas.* Sakykime, kad trupmenos skaitiklis yra x. Tada vardiklis yra $x + 5$. Sprendžiame lygtį: $\frac{x-1}{x+5-1} = \frac{1}{2}$, $x = 6$; $x + 5 = 6 + 5 = 11$.
II būdas. Sakykime, kad naujosios trupmenos skaitiklis lygus x, tada vardiklis yra $2x$. Kadangi ir naujosios trupmenos vardiklio ir skaitiklio skirtumas toks pat, tai $2x - x = 5$, $x = 5$. Naujoji trupmena yra $\frac{5}{10}$, o pradinė — $\frac{6}{11}$.
Atsakymas. $\frac{6}{11}$.

112. a) $\frac{4}{9}$; b) $\frac{5}{12}$; c) tikimybė atsitiktinai ištraukti baltą rutulį iš pirmos dėžutės yra $\frac{10}{18} = \frac{5}{9}$, o iš antros — $\frac{14}{24} = \frac{7}{12}$. Kadangi $\frac{7}{12} > \frac{5}{9}$, tai didesnė tikimybė yra ištraukti baltą rutulį iš antros dėžutės.

113. Keliamieji metai turi 366 dienas. $366 = 7 \cdot 52 + 2$. Taigi jei metai prasidės ketvirtadienį, penktadienį arba šeštadienį, tai metuose bus 53 šeštadieniai, o jeigu kitomis dienomis — tai 52 šeštadieniai. Vadinasi, daugiausia šeštadienių gali būti 53.
Atsakymas. **C**.

2.2. Funkcijos $f(x) = \sqrt{x}$ ir $g(x) = \sqrt[3]{x}$

Šiame skyrelyje nagrinėjamos funkcijos $f(x) = a\sqrt{x}$, $g(x) = a\sqrt[3]{x}$. Teorinėje dalyje apsiribojama paprasčiausiais tų funkcijų atvejais, imant $a = 1$, t. y. nagrinėjamos funkcijos $f(x) = \sqrt{x}$ ir $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Funkcijos, kai $a \neq 1$, nagrinėjamos uždavinių sistemoje.

Nurodymai. 1) Jeigu klasė yra stipri, tai galima šio skyrelio teorinę medžiagą praplėsti analogiškai skyrelio 2.1 medžiagai, kur buvo nagrinėjama funkcija $f(x) = ax^3$, t. y. papildomai tirti funkcijas $f(x) = a\sqrt{x}$, $g(x) = a\sqrt[3]{x}$, kai $a > 0$ ($a \neq 1$) ir kai $a < 0$.
2) Medžiaga, susijusi su funkcija $g(x) = a\sqrt[3]{x}$, yra neprivaloma, bet ji nėra sunki, todėl ją galima nagrinėti ir su visais mokiniais.
3) Privalomosios ir neprivalomosios teorinių dalių struktūros yra vienodos:

- kartojami kvadratinės (ir kubinės) šaknies apibrėžimai,
- remiantis reikšmių lentele braižomi kvadratinės (ir kubinės) šaknies grafikai,
- nustatomos tų funkcijų savybės.

Pakartoti:
ką vadiname kvadratine šaknimi iš skaičiaus;
ką vadiname kubine šaknimi iš skaičiaus.

Išmokti:
nubraižyti funkcijų $f(x) = a\sqrt{x}$ ir $g(x) = a\sqrt[3]{x}$ grafikus;
nustatyti tų funkcijų savybes;
remiantis tų funkcijų grafikais spręsti lygtis ir nelygybes.

Šiame skyrelyje:

1. Nagrinėjama funkcija $f(x) = \sqrt{x}$.
Nurodymai. 1) Svarbu, kad mokiniai gerai suprastų kvadratinės šaknies apibrėžimą. Čia svarbiausia, kad mokiniai įsidėmėtų, jog kvadratinės šaknies pošaknis ir rezultatas negali būti neigiami.
2) Nagrinėjant teorinę dalį, galite liepti mokiniams nubraižyti grafikus funkcijų $f(x) = 2\sqrt{x}$, $f(x) = 4\sqrt{x}$, $f(x) = -\sqrt{x}$, $f(x) = -2\sqrt{x}$, $f(x) = -4\sqrt{x}$ ir panagrinėti jų savybes.
2. Nagrinėjama funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
Nurodymai. 1) Svarbu, kad mokiniai įsimintų kubinės šaknies apibrėžimą. (Beje, mokiniai nesunkiai turėtų pastebėti vadovėlyje paliktą korektūros klaidą: $(-2)^3 = 8$.)
2) Nagrinėjant teorinę dalį, galima liepti mokiniams nubraižyti grafikus funkcijų $f(x) = 2\sqrt[3]{x}$, $f(x) = -\sqrt[3]{x}$, $f(x) = -2\sqrt[3]{x}$ ir panagrinėti jų savybes.
3. Stipresnius mokinius galima supažindinti su lyginio ir nelyginio laipsnio šaknų apibrėžimais bei panagrinėti funkcijas $f(x) = \sqrt[2k]{x}$ ir $g(x) = \sqrt[2k+1]{x}$, kai $k \in \mathbf{N}$.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

11–23, 37c,e,g, 38a,d,f, 41, 42, 50–55, 59, 65, 66

114–125 uždaviniai yra teminiai, kiti — kartojimo.

114. Funkcijos $y = f(x)$ grafikas yra kreivė, esanti: a), c) — I ketvirtyje; b) — IV ketvirtyje; d) — II ketvirtyje; e), g) — I ir III ketvirčiuose; f), h) — II ir IV ketvirčiuose.

115. a) $\approx 3{,}2$; b) 0; $\approx 1{,}5$; c) $\approx 5{,}3$; d) 0; $\approx 1{,}6$;
e) $\approx 1{,}8$; f) $\approx -1{,}8$; 1; g) $\approx 5{,}5$; h) -1; 0; 1.

116. a), b) — 1 sprendinys; c), e), f), g), h) — 2 sprendiniai; d) — sprendinių nėra.

117. a) 2; b) -3; c) 3; d) 20; e) 1,5.

118. a) 4; b) -3; c) 4,5; d) 8,75; e) 6.
Pastaba. Šis uždavinys nėra privalomas — jo numeris turėtų būti nuspalvintas.

119. Kadangi funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ didėja visoje apibrėžimo srityje, t. y. intervale $[0; +\infty)$, tai didesnę argumento reikšmę atitiks didesnė funkcijos reikšmė. Taigi:
a) $f(\frac{5}{8}) < f(\frac{2}{3})$, nes $\frac{5}{8} < \frac{2}{3}$; b) $f(\frac{4}{7}) < f(\frac{3}{5})$; c) $f(\frac{6}{13}) > f(0{,}4)$;
d) $f(\frac{5}{6}) < f(\frac{7}{8})$.

120. Sprendimas analogiškas 119 uždavinio sprendimui:
a) $f(\frac{2}{3}) > f(\frac{3}{5})$; b) $f(-\frac{3}{7}) < f(-\frac{2}{5})$; c) $f(-\frac{4}{7}) < f(0{,}53)$;
d) $f(\frac{5}{7}) > f(\frac{9}{13})$.

121. a) $(4; +\infty)$; b) $(-\infty; 512)$; c) $\approx [0; 10{,}5)$; d) $\approx (-1{,}4; 0)$, $\approx (1{,}4; +\infty)$;
e) $(1; +\infty)$; f) $\approx (-\infty; -2{,}2)$, $\approx (0; 2{,}2)$; g) $\approx (1{,}5; +\infty)$; h) $\approx (0; 1{,}8)$.

122. $\approx 9{,}54$ m.

123. $\approx 17{,}3$ cm.

124. $\approx 0{,}7$ m.

125. $\approx 3{,}9$ cm.

126. a) $(-10; 15)$, $(3; 2)$; b) $(0; 1)$, $(3; -2)$.

127. a) Kadangi funkcijos $f(x) = kx^2$ grafikas eina per tašką, kurio koordinatės yra $(0; 0)$, tai turi būti teisinga lygybė $k \cdot 0^2 = 0$. Iš čia k — bet koks skaičius;
b) -1; c) -1; d) $\frac{1}{4}$.

Šią dalį spręskite tik su stipresniais moksleiviais, prieš tai išsprendę likusias tris dalis.

128. a) -1 ir 1; b) 0 ir 2; c) 2 ir 4; d) sprendinių nėra.

129. a) $\frac{9}{20}$; b) $\frac{3}{4}$.

130. $\frac{1}{5}$.

131. a) $30°$, $60°$, $90°$; b) $(18 + 6\sqrt{3})$ cm; c) $18\sqrt{3}\,\text{cm}^2$; d) $3\sqrt{3}$ cm.

132. Dėžės tūris $V = abc = 48\,(\text{dm}^3)$; čia $a, b, c \in \boldsymbol{N}$, $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$, be to, galima sakyti, kad $a \leqslant b \leqslant c$. Tada $abc = 48$, todėl $a \cdot a \cdot a \leqslant 48$, $a^3 \leqslant 48$, $a \leqslant 3$. Vadinasi, $a = 2$ arba $a = 3$. Kai $a = 2$, tai $bc = 24$, ir turime tris galimybes: $b = 2$, $b = 3$, $b = 4$. Kai $a = 3$, tai $bc = 16$. Kadangi $b \geqslant a$, tai $b = 4$. Gautuosius matmenis galima surašyti į lentelę (žr. dešinėje).
Atsakymas. 2 dm × 2 dm × 12 dm, 2 dm × 3 dm × 8 dm, 2 dm × 4 dm × 6 dm, 3 dm × 4 dm × 4 dm.

a	2	2	2	3
b	2	3	4	4
c	12	8	6	4
V	48	48	48	48

133. *I būdas.* Paprasčiausias sprendimas būtų paimti mechaninį laikrodį ir sukant rodykles suskaičiuoti, kiek kartų tarp 6 val. ryto ir 6 val. vakaro laikrodžio valandinė ir minutinė rodyklės būna statmenos.

Tai sunkus uždavinys.

II būdas. Tarkime, kad abiejų rodyklių ilgiai vienodi ir lygūs R ilgio vnt. Minutinės rodyklės greitis yra $\frac{2\pi R}{60} = \frac{\pi R}{30}$ (ilgio vnt./min.); valandinės rodyklės greitis yra $\frac{2\pi R}{12 \cdot 60} = \frac{\pi R}{360}$ (ilgio vnt./min.). Kai rodyklės būna statmenos, tai tarp rodyklių esančio apskritimo lanko ilgis lygus ketvirčiui apskritimo ilgio, t. y. $\frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi R}{2}$.
Po t minučių minutinės ir valandinės rodyklių galų taškų nueito kelio skirtumas turi būti lygus apskritimo ilgio ketvirčio nelyginiam kartotiniui. Sudarome lygtį: $\left(\frac{\pi R}{30} - \frac{\pi R}{360}\right)t = \frac{\pi R}{2}(2k + 1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \geqslant 0$; $\frac{11}{360}t = \frac{2k+1}{2}$, $t = \frac{180(2k+1)}{11}$.
Nuo 6 val. ryto iki 6 val. vakaro yra 12 valandų, arba 720 minučių. Todėl $t \leqslant 720$. Turime: $\frac{180(2k+1)}{11} \leqslant 720$, $k \leqslant 21{,}5$. Tačiau $k \in \boldsymbol{Z}$ ir $k \geqslant 0$, tai $0 \leqslant k \leqslant 21$. Taigi yra 22 reikšmės, tenkinančios sąlygą.
III būdas. Minutinė rodyklė per valandą nueina $360°$ kampą, todėl kampinis minutinės rodyklės greitis yra $360° : 60 = 6°$ per minutę. Valandinės rodyklės kampinis greitis — $0{,}5°$ per minutę. Po t minučių tarp rodyklių bus $5{,}5°t$ kampas. Sudarome lygtį: $5{,}5t = 90(2k + 1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \geqslant 0$; $t = \frac{180(2k+1)}{11}$.
Gavome jau turėtą lygtį.
IV būdas. Kiekvieną valandą nuo 6 val. iki 7 val., nuo 7 val. iki 8 val., nuo 8 val. iki 9 val. įskaitytinai rodyklės būna statmenos du kartus. Nuo 9 val. iki 10 val. jos statmenos vieną kartą, o nuo 10 val. iki 11 val. ir nuo 11 val. iki 12 val. — du kartus. Gauname $2 \cdot 5 + 1 = 11$ kartų. Padėtys, kurias užima valandinė ir minutinė rodyklės tarp 12 valandos ir 18 valandos, yra simetriškos centro atžvilgiu toms padėtims, kurias jos užima tarp 6 val. ir 12 val., todėl tarp 12 ir 18 valandos rodyklės bus statmenos 11 kartų. Vadinasi, nuo 6 val. iki 18 val. rodyklės bus statmenos 22 kartus.
Atsakymas. **D**.

134. a) $4{,}5\%$ atitinka $\frac{4{,}5}{100} = \frac{9}{200}$ dalis. Vadinasi, 20 kg pieno yra $\frac{9}{200} \cdot 20 = 0{,}9$ (kg) riebalų. $4{,}2\%$ atitinka $\frac{4{,}2}{100} = \frac{21}{500}$ dalis. Vadinasi, 30 kg pieno yra $\frac{21}{500} \cdot 30 =$ $= 1{,}26$ (kg) riebalų. Pieno mišinys sveria $20 + 30 = 50$ (kg). Šiame mišinyje yra $0{,}9 + 1{,}26 = 2{,}16$ (kg) riebalų. Tai sudaro $\frac{2{,}16 \cdot 100}{50} = 4{,}32$ (%).
b) $\frac{2{,}16 \cdot 100}{x} = 2{,}5$, $x = 86{,}4$; $86{,}4 - 50 = 36{,}4$ (kg); $\frac{2{,}16 \cdot 100}{x} = 3{,}2$, $x = 67{,}5$; $67{,}5 - 50 = 17{,}5$ (kg).
Atsakymas. a) 4,32%; b) 36,4kg; 17,5kg.

135. $0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0{,}666... = 0,(6)$.
Pastaba. Kadangi įvykio A tikimybė duota periodine trupmena, tai ir atsakymą natūralu pateikti periodine trupmena. Suprantama, galima apskritai apsieiti be paprastųjų trupmenų:

$\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A) = 1 - 0{,}666... = 0{,}333... = 0,(3)$.

2.3. Funkcijos $y = |f(x)|$ grafikas

Šio skyrelio pagrindinis tikslas yra išmokyti nubraižyti funkcijos $y = |f(x)|$ grafiką bei grafiškai spręsti lygtis ir nelygybes su moduliais.
Nurodymas. Vadovėlyje nepateikti lygčių ir nelygybių su moduliais sprendimo pavyzdžiai. Silpnesniems mokiniams tokių pavyzdžių būtų galima pateikti.

Pakartoti:
skaičiaus modulio sąvoką;
simetriją tiesės atžvilgiu.

Išmokti:
nubraižyti funkcijos $y = |f(x)|$ grafiką, kai duotas funkcijos $y = f(x)$ grafikas;
nubraižyti funkcijos $y = |f(x)|$ grafiką, kai funkcija $y = f(x)$ užrašyta formule;
grafiškai spręsti lygtis ir nelygybes su moduliais.

Šiame skyrelyje:

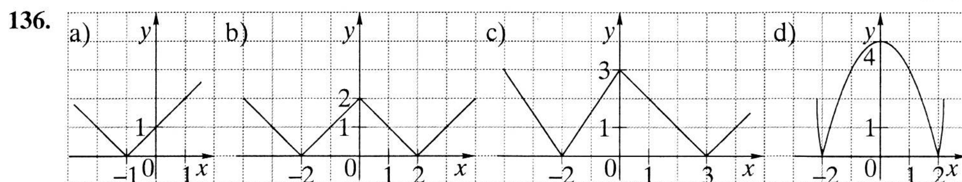
1. Pakartojama skaičiaus modulio sąvoka.
2. Dviem būdais braižomas funkcijos $y = |x|$ grafikas.
   Nurodymas. Su silpnesniais mokiniais pirmojo būdo galima ir nenagrinėti, nes jis nėra universalus ir tinka tik kai po modulio ženklu esanti funkcija yra lyginė.
3. Mėlyname stačiakampyje pateikiamas algoritmas, kuriuo remiantis patogu braižyti funkcijos $y = |f(x)|$ grafiką.
4. Remiantis tuo algoritmu pateikiami du pavyzdžiai, t. y. nubraižomi grafikai funkcijų $f(x) = |2x - 4|$ ir $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$.
5. Pateikiamas pavyzdys, kaip žinant funkcijos $y = f(x)$ grafiką nubraižyti funkcijos $y = |f(x)|$ grafiką.
   Nurodymas. Svarbu, kad mokiniai suvoktų, jog funkcijų $y = f(x)$ ir $y = |f(x)|$ grafikai sutampa intervaluose, kuriuose $f(x) \geqslant 0$, ir yra simetriški x ašies atžvilgiu intervaluose, kuriuose $f(x) < 0$.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

136–143 — teminiai uždaviniai, o kiti — kartojimo.

24–33, 35, 36, 39b,e, 39, 40d–f

136.



137. *Nurodymas.* Remiamės tuo, kad funkcijos $y = |f(x)|$ reikšmių sritis — neneigiami skaičiai.
Atsakymas. a) Taip; b) ne; c) taip; d) ne.

138. *Pastaba.* Remiantis vadovėlio 2 skyrelio struktūra punktas h) turėtų būti nuspalvintas, t. y. neprivalomas. Tačiau jį gali spręsti ir visi moksleiviai.

139. a), c) — 1 sprendinys; b), e) — 2 sprendiniai; f) — 3 sprendiniai; d) — 4 sprendiniai.

140. a) -2 ir 2; b) 0 ir 1; c) -2 ir 2; d) -1, 0 ir 1.

141. a) $(-2; 2)$; b) $(-\infty; -4)$, $(4; +\infty)$; c) $[-1; 1]$; d) $(-\infty; -6)$, $(4; +\infty)$; e) $\approx (-\infty; -2{,}3)$, $\approx (-1{,}7; 1{,}7)$, $\approx (2{,}3; +\infty)$; f) $\approx (-\infty; -3{,}7)$, $[-2; 0]$, $\approx [1{,}7; +\infty)$; g) $(-1; 0)$, $(0; 1)$; h) $(-1; 0)$, $(0; 1)$.

142. a), b), c), d), f), g) — lyginė; e), h) — nelyginė.

143. E. *Nurodymas.* Paprasčiausias sprendimo būdas — nubraižyti duotųjų funkcijų grafikus.

144. a) Po 2 metų; b) po 3 metų.

145. a) 6122,45 Lt; b) 18 987,34 Lt.

146. a) 22 000 Lt; b) 11 400 Lt.

147. Sakykime, kad cecho pelnas yra x Lt.
a) *I būdas.* Sprendžiame lygtį: $x - 0{,}29x = 650$, $x \approx 915{,}49$ Lt.
II būdas.

$$\begin{aligned} 650\,\text{Lt} &— 71\%, \\ x\,\text{Lt} &— 100\%, \end{aligned} \qquad x \approx 915{,}49\,\text{Lt};$$

b) 855,26 Lt; c) 722,22 Lt; d) $\frac{65\,000}{100-p}$ Lt.

148. a) 590 Lt; b) 708 Lt.

149. a) $S_{\check{s}on} = 2\pi rh$. Pagal sąlygą $h = r + 3$. Tada $2\pi r(r + 3) = 80\pi$, $r = 5$ cm;
$d = 2r = 2 \cdot 5 = 10$ (cm);
b) $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 5^2(5 + 3) = 200\pi$ (cm^3).

150. a) 3; b) 15; c) 9.
Nurodymas. Remkitės trikampių panašumu.

151. a) π cm; b) $1{,}5\pi$ cm; c) 2π cm; d) 5π cm; e) $6\frac{2}{3}\pi$ cm.

152. a) 3; b) sprendinių nėra.

153. a) $x > 6$; b) $x \leqslant 3$.

154. 12.

155. a) $8\frac{1}{9}$; b) $-7\frac{2}{3}$; c) 9; d) $\frac{1}{64}$.

156. *I būdas*. Sakykime, kad Andrius pataikė x kartų.
Sprendžiame lygtį: $5 + 2x = 17$, $x = 6$.
II būdas. Andrius gavo papildomai $17 - 5 = 12$ (šūvių). Papildomais šūviais jis buvo premijuotas už taiklius šūvius. Vadinasi, Andrius pataikė $12 : 2 = 6$ (kartus).
Atsakymas. **A**.

Šį neprivalomą skyrelį galima laikyti kartojimo skyreliu. Grafikų transformacijos buvo nagrinėjamos 9 klasėje braižant kvadratinės funkcijos grafiką (žr. Matematika 9, I dalis, 2 skyrius, 4 skyrelis). Šiame skyrelyje nieko naujo nėra dėstoma, o tiesiog apibendrinamos turėtos žinios. Žinoma, šiame skyrelyje galima transformuoti ir grafikus funkcijų, nagrinėtų ankstesniuose skyreliuose: $y = ax^3$, $y = a\sqrt{x}$, $y = a\sqrt[3]{x}$, $y = |f(x)|$.

Nurodymai. 1) Svarbiausia, kad mokiniai suvoktų, jog suteikus pokytį funkcijos argumentui ar (ir) funkcijai tos funkcijos grafiko forma nesikeičia, o keičiasi tik grafiko padėtis koordinačių plokštumoje.

2) Skyrelyje pateikiami 3 pavyzdžiai, iliustruojantys atvejus, kai suteikiamas pokytis funkcijai; argumentui; ir funkcijai, ir argumentui.

Pakartoti, kaip galima gauti funkcijų $y = ax^2 + c$, $y = a(x-m)^2$, $y = a(x-m)^2+n$ grafikus iš funkcijos $y = ax^2$ grafiko.

Išmokti grafikų transformacijas taikyti ankstesniuose skyreliuose nagrinėtų funkcijų grafikams.

Šiame skyrelyje:

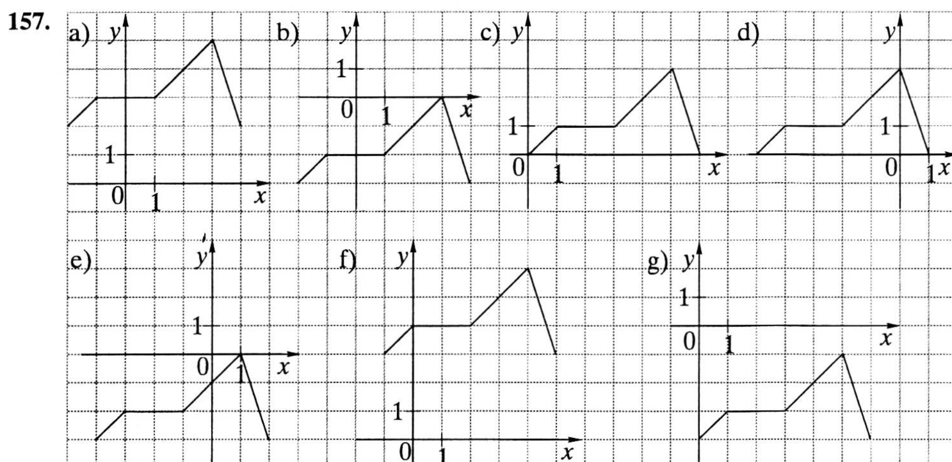
1. Nagrinėjamos funkcijos $y = x^3 + 3$ ir $y = x^3$ siekiant įsitikinti, kaip kinta funkcijos grafiko padėtis suteikus funkcijai pokytį.
2. Nagrinėjamos funkcijos $y = (x-2)^3$ ir $y = x^3$ siekiant įsitikinti, kaip pakinta funkcijos grafiko padėtis suteikus argumentui pokytį.
3. Nagrinėjamos funkcijos $y = (x-2)^3 + 3$ ir $y = x^3$ siekiant apibendrinti ankstesnių pavyzdžių atvejus.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

157–171 uždaviniai yra teminiai, kiti — kartojimo.

34, 37d,h,i, 40a–c, 43, 44, 45, 57, 58

157.



158. Funkcijos $f(x)$ grafiką galima gauti pastūmus:

a) kreivę $y = \sqrt{x}$ per 3 vienetus į kairę;
b) kreivę $y = \sqrt{x}$ per 2 vienetus į dešinę;
c) kreivę $y = \sqrt{x}$ per 2 vienetus į dešinę ir per 3 vienetus žemyn;
d) kubinę parabolę $y = x^3$ per 3 vienetus žemyn;
e) kubinę parabolę $y = \frac{1}{2}x^3$ per 2 vienetus aukštyn;
f) kreivę $y = \sqrt[3]{x}$ per 2 vienetus į kairę.

159. **D.**

161. Funkcijos $g(x)$ grafiką gautume, jeigu pastumtume funkcijos $f(x) = |x|$ grafiką:

a) per 3 vienetus į dešinę ir per 1 vienetą aukštyn;
b) per 2 vienetus į kairę ir per 3 vienetus žemyn;
c) per 4 vienetus į dešinę ir per 2 vienetus žemyn;
d) per 4 vienetus į kairę ir per 3 vienetus aukštyn.

162. Funkcijos $g(x)$ grafiką galima gauti pastūmus hiperbolę $y = \frac{1}{x}$:

a) per 1 vienetą į dešinę;
b) per 2 vienetus į kairę;
c) per 2 vienetus į kairę ir per 3 vienetus žemyn;
d) per 1 vienetą į dešinę ir per 3 vienetus aukštyn.

163. a) $y = \frac{6}{x+3} + 5$; b) $y = 4(x-2)^3 - 1$; c) $y = \sqrt{x-5} + 4$;
d) $y = |x+4| - 6$; e) $y = \sqrt[3]{x+1} - 3$; f) $y = -\frac{4}{x-6} + 1$.

164. a) $[-6; 4]$; b) $[-1; 9]$; c) $[-4; 6]$; d) $[-4; 6]$; e) $[-2; 8]$.

165. a) $[-6; 3]$; b) $[-6; 3]$; c) $[-2; 7]$; d) $[-8; 1]$; e) $[-3; 6]$.

166. a) $D(f) = (-\infty; -1)$ ir $(-1; +\infty)$; b) $a = 4$, $b = 1$;
c) funkcijos $f(x)$ grafikas yra hiperbolė $y = -\frac{4}{x}$, pastumta per 1 vienetą į kairę ir per 1 vienetą aukštyn.

167. a) $D(f) = (-\infty; 2)$ ir $(2; +\infty)$; b) $a = 3$, $b = -1$; c) $f(x) \neq -1$.

168. Funkciją $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ užrašykime pavidalu $f(x) = \frac{b-ac}{x+c} + a$, be to, pastebėkime, kad $f(0) > 0$. Iš grafiko matyti, kad hiperbolė $y = \frac{b-ac}{x}$ pastumta į kairę atstumu c ir pakelta į viršų atstumu a. Darome išvadą, kad $c > 0$ ir $a > 0$. Kadangi $f(0) > 0$ ir $f(0) = \frac{b}{c}$, tai $\frac{b}{c} > 0$. Kai $c > 0$, tai $\frac{b}{c} > 0$ tada, kai $b > 0$. Gavome, kad $a > 0$, $c > 0$ ir $b > 0$.
Atsakymas. **D**.

169. **E**.

170. a), b), d) — didėjanti; c), e) — mažėjanti.

171. a) **A** ir **E**; b) **C** ir **E**.

172. a) 95,625; b) $25\frac{230}{243}$.

173. a) Pagal paprastųjų palūkanų formulę $P_d = S \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{d}{360}$ rasime diskonto normą: $1500 \cdot \frac{8,5}{100} \cdot \frac{100}{360} \approx 35,42$ (Lt). Tada diskontuoto vekselio kaina yra $1500 - 35,42 = 1464,58$ (Lt);
b) $2000 \cdot \frac{9}{100} \cdot \frac{75}{360} = 37,5$ (Lt); $2000 - 37,5 = 1962,5$ (Lt);
c) $S \cdot \frac{9,5}{100} \cdot \frac{130}{360} = 61,75$, $S = 1800$ Lt; $1800 - 61,75 = 1738,25$ (Lt);
d) $S \cdot \frac{8}{100} \cdot \frac{80}{360} = 22,22$, $S \approx 1249,88$ Lt; $1249,88 - 22,22 = 1227,66$ (Lt).

174. a) 6; b) 24.

175. a) $(260\,000 - 6750\pi)$ kubinių vienetų; b) 29 400 kvadratinių vienetų.
Pastaba. Paprastai braižant detales, darant įvairius projektus ir pan. vadovaujamasi taisykle, jog visi matavimai pateikiami milimetrais. Todėl skaičiavimų rezultatų prasmė: a) mm^3; b) mm^2.

176. a) Sprendinių nėra.
b) Abi lygtys virsta vienodomis: $5y = 4x + 1$, $y = \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}$. Todėl sprendiniai yra $(x; \frac{4}{5}x + \frac{1}{5})$, $x \in \boldsymbol{R}$. Paprastai tai užrašoma taip: $(t; \frac{4}{5}t + \frac{1}{5})$, $t \in \boldsymbol{R}$. Turime be galo daug sprendinių.

178. *I būdas.* $2^{4n+2} = 2^{4n} \cdot 2^2 = (2^4)^n \cdot 4 = 16^n \cdot 4$. Kai $n \in \boldsymbol{N}$, tai 16^n visuomet baigiasi skaitmeniu 6, o sandauga $16^n \cdot 4$ — skaitmeniu 4.
II būdas. $4n + 2$, kai $n \in \boldsymbol{N}$, duoda seką: 6, 10, 14, 18, ... Tada $2^6 = 64$, $2^{10} = 2^6 \cdot 2^4 = 64 \cdot 16 = ...4$, $2^{14} = 2^{10} \cdot 16 = ...4 \cdot 16 = ...4$ ir t. t.
Atsakymas. 4.

179. *I būdas.* Tarkime, kad kiekvienoje klasėje mokosi ne daugiau kaip 25 mokiniai. Tada mokyklos mokinių skaičius ne didesnis už $25 \cdot 29 = 725$. Gavome prieštarą sąlygai, taigi mūsų prielaida neteisinga. Vadinasi, yra bent viena klasė, kurioje mokosi ne mažiau kaip 26 mokiniai.
II būdas. Klasės mokinių skaičiaus vidurkis $730 : 29 = 25,172...$, t. y. daugiau negu 25 mokiniai. Vadinasi, tikrai yra klasių, kuriose mokosi ne mažiau kaip 26 mokiniai.
Nurodymas. Kaip spręsti panašius uždavinius remiantis vadinamuoju Dirichlė principu, galite pasiskaityti vadovėlyje „Matematika 10, II dalis“, 71 p.

180. a) 8 cm, 20 cm; b) 15 cm; c) $210\,cm^2$; d) 16,8 cm.

181. a) $(-\infty; -2)$; b) $[3; +\infty)$.

182. -12, -11, -10 arba 10, 11, 12.

183. Jeigu kūnai juda priešingomis kryptimis, tai atstumų, kuriuos kūnai nukeliauja nuo vieno susitikimo iki kito, suma lygi apskritimo ilgiui. Jeigu kūnai juda viena kryptimi, tai atstumų, kuriuos kūnai nukeliauja nuo vieno susitikimo iki kito, skirtumas lygus apskritimo ilgiui.
Tarkime, kad vieno kūno greitis yra x m/s, o kito y m/s ir $x > y > 0$. Tada:
a) $5x + 5y = 100$ ir $x + y = 20$ (m/s);
b) $25x - 25y = 100$ ir $x - y = 4$ (m/s);
c) $\begin{cases} x + y = 20, \\ x - y = 4, \end{cases}$ $x = 12$ m/s, $y = 8$ m/s.

184. Išspręskime uždavinį sudarydami lygčių sistemą. Sakykime, kad dabar tėvui yra x metų, vyriausiajam sūnui — a metų, viduriniajam — b metų, o jauniausiajam — c metų.

$$\begin{cases} a + b + c = x - 5, \\ 10 + x = 2(a + 10), \\ 20 + x = 2(b + 20), \\ 30 + x = 2(c + 30). \end{cases}$$

Panariui sudėję antrą, trečią ir ketvirtą lygtis gauname:

$$3x + 60 = 2(a + b + c) + 2 \cdot 60,$$

$$3x = 2(a + b + c) + 60.$$

Įstatę $a+b+c$ išraišką iš pirmos lygties turime $3x = 2x - 10 + 60$, $x = 50$. Tada $10+50 = 2(a+10)$, $a = 20$; $20+50 = 2(b+20)$, $b = 15$; $30+50 = 2(c+30)$, $c = 10$.
Atsakymas. Tėvui yra 50 metų, vyriausiajam sūnui — 20 metų, viduriniajam — 15 metų, o jauniausiajam — 10 metų.

3. LYGČIŲ IR NELYGYBIŲ SISTEMOS

Skyrių sudaro tik du skyreliai, be to, vienas jų („Tiesinių nelygybių su dviem kintamaisiais sistemos“) yra neprivalomas. Šį skyrių galima laikyti 9 klasės vadovėlio skyriaus „Tiesinių lygčių sistemos“ (Matematika 9, I dalis, 3 skyrius) tęsiniu.

Pagrindinis tikslas — išmokyti spręsti dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemas, kai viena lygtis yra tiesinė, kita — netiesinė.

Minimalus lygmuo:

1. Žinoti, ką vadiname lygčių sistemos sprendiniu.
2. Nustatyti, ar duotoji skaičių pora yra lygčių sistemos sprendinys.
3. Mokėti išspręsti paprastą dviejų lygčių sistemą, kai viena lygtis yra tiesinė, o kita — netiesinė.

Pagrindinis lygmuo:

4. Mokėti keitimo ir grafiniu būdu išspręsti lygčių sistemą, kai viena lygtis yra tiesinė, o kita — netiesinė.
5. Gebėti išspręsti tekstinius uždavinius, kuriuos sprendžiant gaunama sistema su viena netiesine lygtimi.

Aukštesnis lygmuo:

6. Gebėti spręsti nesudėtingas dviejų lygčių sistemas, kai abi lygtys yra netiesinės.
7. Atpažinti tiesinę nelygybę su dviem kintamaisiais, gebėti nurodyti keletą jos sprendinių ir visus jos sprendinius vaizduoti grafiškai.
8. Gebėti grafiškai nurodyti dviejų tiesinių nelygybių su dviem kintamaisiais sistemos sprendinius.

3.1. Lygčių sistemos, kai viena lygtis yra netiesinė

Šio skyrelio teorinę medžiagą sudaro trys dalys:
1) kartojama, kaip sprendžiamos dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos;
2) mokoma spręsti sistemas, kai viena lygtis yra netiesinė;
3) mokoma spręsti sistemas, kai abi lygtys yra netiesinės.

Pakartoti:

ką vadiname lygties su dviem nežinomaisiais sprendiniu;
ką vadiname dviejų tiesinių lygčių sistemos sprendiniu;
dviejų tiesinių lygčių sprendimą grafiniu, keitimo ir sudėties būdais;
tekstinių uždavinių sprendimą sudarant tiesinių lygčių sistemą.

Išmokti:

spręsti lygčių sistemas, kai viena lygtis yra netiesinė;
spręsti tekstinius uždavinius sudarant lygčių sistemą;
koordinačių plokštumoje vaizduoti tiesinės nelygybės su dviem kintamaisiais sprendinius;
koordinačių plokštumoje vaizduoti dviejų tiesinių nelygybių su dviem kintamaisiais sprendinius.

Šiame skyrelyje:

1. Primenama, ką vadiname tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos sprendiniu ir pateikiama užduotis išspręsti dviejų tiesinių lygčių sistemą grafiniu, keitimo ir sudėties būdais.
   Nurodymai. 1) Svarbu, kad visi mokiniai mokėtų spręsti dviejų tiesinių lygčių sistemas. Silpnesnieji mokiniai neturėtų pradėti spręsti sudėtingesnių sistemų, kol gerai neįsisavino paprastesnių. Silpnesniems mokiniams čia vertėtų pateikti nemažai sistemų ir akcentuoti jų sprendimą *keitimo* būdu, nes keitimo būdas yra pagrindinis sprendžiant sistemas, kurių viena lygtis yra netiesinė.
   2) Stipriausiems mokiniams galite pasiūlyti išspręsti dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais (x ir y) sistemą $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2; \end{cases}$ $a_1, b_1, a_2, b_2 \neq 0$.

Keitimo būdas.

$$x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1},$$
$$a_2\frac{c_1 - b_1y}{a_1} + b_2y = c_2,$$
$$\frac{a_2c_1}{a_1} - \frac{a_2b_1y}{a_1} + b_2y = c_2,$$
$$y\left(b_2 - \frac{a_2b_1}{a_1}\right) = c_2 - \frac{a_2c_1}{a_1},$$
$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1} : \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1},$$
$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1};$$
$$x = \frac{c_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Sudėties būdas.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$
$$-\begin{cases} a_1a_2x + b_1a_2y = c_1a_2, \\ a_1a_2x + b_2a_1y = c_2a_1, \end{cases}$$
$$y(b_1a_2 - b_2a_1) = c_1a_2 - c_2a_1,$$
$$y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{b_1a_2 - b_2a_1}, \quad \text{ir t. t.}$$

2. Pateikiamas lygčių sistemos su viena netiesine lygtimi pavyzdys ir pasakoma, kas yra jos sprendinys. *Nurodymas.* Nustatyti, ar duotoji skaičių pora yra sistemos sprendinys, turėtų sugebėti visi mokiniai. Čia galima paklausti mokinių, kaip spręsti tokią sistemą, ar tiktų sudėties būdas.

3. Pateikiamas uždavinys siekiant:
   - parodyti pavyzdį, kurį sprendžiant gaunama lygčių sistema, kurios viena lygtis yra netiesinė;
   - parodyti, kad tokios sistemos apytikslius sprendinius galima gauti braižant abiejų į sistemą įeinančių lygčių grafikus;
   - parodyti, kad algebriškai sprendžiant gaunami tikslūs sprendiniai ir kad sprendžiant tokias sistemas tinka keitimo būdas.

   Nurodymas. 1) Nurodykite mokiniams, ypač silpnesniems, gautus sistemos sprendinius tikrinti. Nors kartais tai gali užimti ir nemažai laiko, ypač kai gaunami „negražūs" skaičiai, bet tai naudinga skaičiavimo įgūdžiams lavinti.
   2) Priminkite mokiniams, kad prieš rašant atsakymą reikia dar kartą perskaityti, ko klausia uždavinys.

4. Pateikiamas algoritmas, žodžiais nusakantis, kaip keitimo būdu sprendžiamos lygčių sistemos, kai viena lygtis yra netiesinė:
   1) tiesinės lygties vieną nežinomąjį išreiškiame kitu;
   2) gautąją išraišką įrašome į kitą sistemos lygtį;
   3) išsprendžiame gautą lygtį su vienu nežinomuoju;
   4) apskaičiuojame atitinkamas kito nežinomojo reikšmes.

   Nurodymas. Būtų gerai, kad šį algoritmą žodžiais gebėtų nusakyti dauguma mokinių.

5. Pilkajame fone išsprendžiami du pavyzdžiai sistemų, kurių abi lygtys yra netiesinės.
   Nurodymas. Sprendžiant tokias sistemas nereikia skubėti remtis keitimo būdu primityviai išreiškiant kurį nors nežinomąjį. Dažniausiai sistemos sprendimas supaprastėja taikant sudėties būdą ar išreiškiant ne nežinomąjį, o į abi sistemos lygtis įeinantį bendrą reiškinį.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai pratimai yra 185–212, o kiti — kartojimo. 1–56

185. Uždavinys skirtas pakartoti tiesinių lygčių sistemų sprendimą. Spręsti galima tiek keitimo, tiek sudėties, tiek grafiniu būdu. Svarbiausia akcentuoti keitimo būdą, kuriuo bus remiamasi sprendžiant sistemas su viena netiesine lygtimi.
Atsakymas. a) (2; 1); b) $\left(2\frac{6}{17}; -2\frac{13}{17}\right)$; c) (4,4; 1,72); d) (10; 5).

186. a) Taip; b) ne; c) taip; d) ne.

187. a) $\approx(-0{,}9; 4{,}9)$, $\approx(4{,}9; -0{,}9)$; b) $\approx(-1{,}2; -3{,}2)$, $\approx(3{,}2; 1{,}2)$;
c) $\approx(2{,}4; 2{,}4)$, $\approx(6{,}6; 6{,}6)$; d) $(-1; 1)$, $(3; 9)$;
e) $\approx(-0{,}9; 2{,}8)$, $\approx(1{,}2; 3{,}3)$; f) $(-2; -2)$, $(0{,}5; -0{,}1)$; g) $(1; 3)$, $(3; -1)$;
h) $\approx(-1{,}9; 3{,}5)$, $\approx(1{,}9; 3{,}5)$; i) $\approx(1{,}2; 2{,}5)$.
Pastaba. e) ir f) punktai pateikti kaip neprivalomi. Tai korektūros klaida. Tokius pratimus turėtų gebėti išspręsti visi moksleiviai. h) ir i) punktai yra neprivalomi visiems moksleiviams, nes čia pateiktos abi lygtys yra netiesinės, bet grafiškai jas spręsti gali ir visi mokiniai.

188. Visos čia pateiktos lygčių sistemos sprendžiamos keitimo būdu. Reikia siekti, kad tokius uždavinius gebėtų spręsti visi moksleiviai.
Atsakymas. a) $(-7; 10)$, $(6; -3)$; b) $(13; -4)$, $(4; 5)$; c) $(1; -2)$, $(2; -1)$; d) $(-1{,}2; -2)$, $(2; 1{,}2)$; e) $(4; 2)$; f) $(-7; -4)$, $(4; 7)$; g) $(3; 6)$; h) $(0{,}6; 0{,}4)$, $(4; -3)$; i) $(-14; -7)$, $(-2; 5)$.
Nurodymas. e) punktą galima spręsti taip:

$$\begin{cases} x+y=6, \\ x^2-y^2=12; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=6, \\ (x+y)(x-y)=12; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=6, \\ 6(x-y)=12; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=6, \\ x-y=2; \end{cases}$$

$2x=8, x=4, y=2.$

189. Tai lygčių sistemos, kurių abi lygtys yra antrojo laipsnio. Joms spręsti naudojame sudėties, keitimo, o dažnai ir abu šiuos būdus kartu.
Atsakymas. a) $(-3\sqrt{2}; -\sqrt{6})$, $(-3\sqrt{2}; \sqrt{6})$, $(3\sqrt{2}; -\sqrt{6})$, $(3\sqrt{2}; \sqrt{6})$;
b) $\left(-\frac{2}{3}; 18\right)$, $(5; 1)$; c) $(0; -5)$, $(1; -4)$; d) $(-3; -3)$, $\left(4; \frac{1}{2}\right)$.

190. Funkcijų grafikų susikirtimo taškų koordinatės yra sprendiniai lygčių sistemos:
a) $\begin{cases} y=2x-1, \\ y=x^2-3x+3, \end{cases}$ (1; 1), (4; 7);
b) $\begin{cases} y=x-12, \\ x^2+y^2=64, \end{cases}$ sprendinių nėra. Vadinasi, tiesė $y=x-12$ nekerta apskritimo $x^2+y^2=64$. Moksleiviai tuo gali įsitikinti ir braižydami.

191. Sprendžiant tekstinius uždavinius reikėtų moksleiviams priminti, kad būtina įvardyti, ką kokiu nežinomuoju pažymime. Dažnai jie linkę praleisti šią svarbią uždavinio sprendimo dalį. Čia, kaip ir sprendžiant tiesinių lygčių sistemas, kai kuriuos uždavinius galima spręsti sudarant lygtį su vienu nežinomuoju. Leiskime mokiniams spręsti taip, kaip jie geriausiai moka.

Sprendimas. Sakykime, kad vienas skaičius yra x, o kitas — y. Pagal sąlygą:

$\begin{cases} x+y=17, \\ xy=42. \end{cases}$ Išsprendę lygčių sistemą gauname du sprendinius: (14; 3) ir (3; 14). Tačiau atsakyme nurodome tik vieną variantą, nes šiuo atveju visai nesvarbu, kuris skaičius yra pirmas, o kuris — antras.

Atsakymas. 3 ir 14.

192. Vienas skaičius yra x, kitas — y.

$$\begin{cases} x-y=6, \\ xy=216. \end{cases}$$

Atsakymas. -12 ir -18; 18 ir 12.

193. -4 ir 14.

194. Sakykime, kad stačiakampio ilgis yra x cm, o plotis — y cm.

$$\begin{cases} 2x+2y=46, \\ x^2+y^2=17^2. \end{cases}$$

Atsakymas. 8 cm ir 15 cm.

195. Sakykime, kad vieno statinio ilgis yra x cm, o kito — y cm.

$$\begin{cases} x-y=3, \\ x^2+y^2=15^2. \end{cases}$$

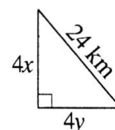
Atsakymas. 9 cm, 12 cm ir 54 cm^2.

196. 96 cm^2.

197. 40 m ir 20 m.

198. Sakykime, kad pirmoji grupė ėjo x km/h greičiu, o antroji — y km/h greičiu.

$$\begin{cases} 4x-4y=4{,}8, \\ (4x)^2+(4y)^2=24^2. \end{cases}$$



Atsakymas. Pirmoji grupė ėjo 4,8 km/h greičiu, o antroji — 3,6 km/h greičiu.

199. Sakykime, kad pirmasis kūnas juda x m/s greičiu, o antrasis — y m/s greičiu.

$$\begin{cases} 6x=8y, \\ (15x)^2+(15y)^2=3^2. \end{cases}$$

Atsakymas. Pirmasis kūnas juda $\frac{4}{25}$ m/s greičiu, o antrasis — $\frac{3}{25}$ m/s greičiu.

200. Sakykime, kad pradiniai aikštelės matmenys buvo x m ir y m.

$\begin{cases} 2x+2y=24, \\ (x+3)(y-4)=1{,}5xy, \end{cases}$ $x=2,\ y=10.$

Pastaba. Nemaža dalis moksleivių šioje vietoje iškart rašytų atsakymą, kad aikštelės matmenys yra 2 m ir 10 m. Atkreipkite jų dėmesį, kad tai yra *pradiniai* aikštelės matmenys. Sąlygoje gi prašoma rasti *dabartinius* jos matmenis, t. y. matmenis, kai vieną aikštelės kraštą pailgino 3 m, o kitą sutrumpino 4 m. Akivaizdu, kad negalėjo sutrumpinti to krašto, kurio ilgis yra 2 m. Taigi buvo sutrumpintas 10 m ilgio kraštas ir pailgintas 2 m ilgio kraštas. Dabartiniai aikštelės matmenys yra: $2+3=5$ (m) ir $10-4=6$ (m).

Atsakymas. 5 m ir 6 m.

201. Sakykime, kad trupmenos skaitiklis yra x, o vardiklis — y.

$\begin{cases} y-x=3, \\ \frac{x+7}{y+5}-\frac{x}{y}=\frac{1}{2}, \end{cases}$ $(-9; -6)$, $(2; 5)$.

Patikrinę įsitikiname, kad trupmena $\frac{2}{5}$ tenkina uždavinio sąlygą. Tuo tarpu trupmena $\frac{-9}{-6}$ netenkina šio uždavinio sąlygos, nes pagal paprastosios trupmenos $\frac{m}{n}$ apibrėžimą, $n \in \boldsymbol{N}$.

Atsakymas. $\frac{2}{5}$.

202. $\frac{x}{y}$ — pradinė trupmena.

$$\begin{cases} \frac{x+1}{y+1} = \frac{1}{3}, \\ \frac{x-3}{y-3} = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Atsakymas. $\frac{7}{23}$.

203. Sakykime, kad traukinio greitis yra x km/h, o lėktuvo — y km/h.

$$\begin{cases} \frac{480}{x} - \frac{1920}{y} = 3, \\ y = 8x. \end{cases}$$

Atsakymas. Traukinio greitis yra 80 km/h, o lėktuvo — 640 km/h.

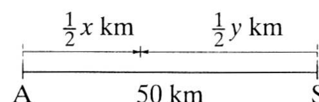
204. x km/h — paprastojo keleivinio traukinio greitis, o y km/h — greitojo traukinio greitis.

Nurodymas. Pravartu iškart minutes paversti valandomis, t. y. 45 min $= \frac{3}{4}$ h.

$$\begin{cases} \frac{150}{x} - \frac{150}{y} = \frac{3}{4}, \\ y - x = 10. \end{cases}$$

Atsakymas. Paprastojo traukinio greitis yra 40 km/h, o greitojo — 50 km/h.

205. *Nurodymas.* Pravartu susidaryti motociklininkų judėjimo schemą.
x km/h — iš Akmenynės išvažiavusio motociklininko greitis, y km/h — iš Smėlynės išvažiavusio motociklininko greitis; 30 min $= \frac{1}{2}$ h, 25 min $= \frac{5}{12}$ h.



$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 50, \\ \frac{50}{x} - \frac{50}{y} = \frac{5}{12}. \end{cases}$$

Atsakymas. Iš Akmenynės išvažiavusio motociklininko greitis yra 40 km/h, o išvažiavusio iš Smėlynės — 60 km/h.

206. Sakykime, kad pirmojo automobilio greitis yra x km/h, o antrojo — y km/h; 27 min $= \frac{9}{20}$ h.

$$\begin{cases} x + y = 90, \\ \frac{90}{x} - \frac{90}{y} = \frac{9}{20}. \end{cases}$$

Atsakymas. Pirmojo automobilio greitis yra 40 km/h, o antrojo — 50 km/h.

207. Sakykime, kad Lina, dirbdama atskirai, išvalo langus per x valandų, o jos mama — per y valandų. Per 1 h Lina išvalo $\frac{1}{x}$, mama — $\frac{1}{y}$, o abi kartu — $\frac{1}{2}$ langų.

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}, \\ x - y = 3. \end{cases}$$

Atsakymas. Lina, dirbdama atskirai, išvalo langus per 6 h, o mama — per 3 h.

208. Sakykime, kad pirmoji grupė, dirbdama atskirai, apželdintų sklypą per x dienų, o antroji — per y dienų.

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}, \\ y - x = 5. \end{cases}$$

Atsakymas. Pirmoji grupė, dirbdama atskirai, apželdintų sklypą per 10 dienų, o antroji — per 15 dienų.

209. Sakykime, kad pirmoji grupė, dirbdama atskirai, kelio ruožą suremontuotų per x dienų, o antroji — per y dienų.

Tai sudėtingesnis uždavinys. Jį rekomenduojame spręsti tik su stipresniais moksleiviais.

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ 8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + 7 \cdot \frac{1}{y} = 1. \end{cases}$$

Atsakymas. Pirmoji grupė, dirbdama atskirai, suremontuotų kelio ruožą per 28 dienas, o antroji — per 21 dieną.

210. Sakykime, kad leidžiant vandenį pirmuoju vamzdžiu galima pripildyti baką per x valandų, o antruoju — per y valandų; 2 h 55 min $= \frac{35}{12}$ h.

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{12}{35}, \\ y - x = 2. \end{cases}$$

Atsakymas. Leidžiant vandenį pirmuoju vamzdžiu galima pripildyti baką per 5 valandas, o antruoju — per 7 valandas.

211. Sakykime, kad turėjo būti x turistų ir kad jie turėjo sumokėti po y Lt kiekvienas.

Šį uždavinį rekomenduojame spręsti tik su stipresniais moksleiviais, nes gauname lygčių sistemą, kurioje abi lygtys yra netiesinės.

$$\begin{cases} xy = 360, \\ (x-2)(y+6) = 360, \end{cases} \quad x = 12,\ y = 30;\ 12 - 2 = 10,\ 30 + 6 = 36.$$

Atsakymas. Už ekskursiją sumokėjo 10 žmonių po 36 Lt.

212. Sakykime, kad buvo nupirkta x kg pirmos rūšies ir y kg antros rūšies prekių. Vienas kilogramas pirmos rūšies prekių kainavo $\frac{210}{x}$ Lt, o antros rūšies — $\frac{156}{y}$ Lt.

$$\begin{cases} x - y = 3, \\ \frac{210}{x} - \frac{156}{y} = 1. \end{cases}$$

Atsakymas. 15 kg pirmos rūšies ir 12 kg antros rūšies prekių; arba 42 kg pirmos rūšies ir 39 kg antros rūšies prekių.

213. a) Išsprendę nelygybių sistemą $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ -x \geqslant 0 \end{cases}$ gauname, kad $x = 0$;
b) $x - 1 \geqslant 0$, $x \geqslant 1$.

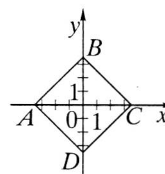
214. $\begin{cases} 2k + b = 3, \\ -5k + b = -4, \end{cases}$ $k = 1$, $b = 1$.

215. $60\,000 \cdot 0{,}0016 - 60\,000 \cdot 0{,}002 = 24$ (Lt).

216. a) 27; 243; b) 121; 1093.
Pastaba. Žinoma, kad sąlygoje minimi ketvirtadienis, penktadienis, šeštadienis ir sekmadienis yra tos pačios savaitės dienos.

217. a) Palūkanos už vieną obligaciją yra $191{,}85 \cdot \frac{8{,}5}{100} \cdot \frac{1}{2} \approx 8{,}15$ (Lt). Tada už 5 obligacijas palūkanos yra $5 \cdot 8{,}15 = 40{,}75$ (Lt);
b) 5,1 Lt.
Pastabos. 1) Sprendžiant šį uždavinį galima iškart skaičiuoti palūkanas už 5 obligacijas: $5 \cdot 191{,}85 \cdot \frac{8{,}5}{100} \cdot \frac{1}{2} \approx 40{,}77$ (Lt). Skirtingas atsakymas — apvalinimo pasekmė.
2) Galima pasiūlyti moksleiviams apskaičiuoti ir obligacijos nominaliąją vertę: a) $191{,}85 + 8{,}15 = 200$ (Lt).

218. a) $(-3{,}5; 0)$, $(0; 3{,}5)$, $(3{,}5; 0)$, $(0; -3{,}5)$; b) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$; c) $14\sqrt{2}$; d) 24,5;
e) $(-1{,}5; -3)$, $(2; 0{,}5)$, $(5{,}5; -3)$, $(2; -6{,}5)$.



219. a) 12,8 cm ir 19,2 cm; b) $9\frac{1}{7}$ cm ir $6\frac{6}{7}$ cm.
Nurodymas. Moksleiviams reikės prisiminti du faktus: 1) prieš ilgiausiąją trikampio kraštinę yra didžiausias kampas; 2) trikampio pusiaukampinės savybę.

220. a) Ne; b) taip.

221. a) $r = 4$ cm, $h = 10$ cm; b) 80 cm^2; c) 5 : 4; d) 160π cm^3.

222. *Nurodymas.* a) Įrodyti negalima, nes lygybė nėra tapatybė: paėmę $a = 0$ gauname neteisingą lygybę $2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Dešinėje lygybės pusėje trupmenos skaitiklyje vietoj 1 parašę 3, t. y. $\frac{6a-3}{a^2-4}$, gautume tapatybę.

223. a) Sakykime, kad klasėje mokosi x berniukų. Tikimybė iš 28 klasės mokinių atsitiktinai išrinkti berniuką yra $\frac{x}{28}$. Pagal sąlygą: $\frac{x}{28} = \frac{4}{7}$, $x = 16$;
b) $28 - 16 = 12$;
c) $\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$ (arba $1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$).

224. a) $\sqrt{2}$; b) $3\sqrt{2}$; c) -4; d) -2; e) 6; f) 18; g) $54\sqrt{2}$.
Nurodymas. Pirmiausia pertvarkykite reiškinius: $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

3.2. Tiesinių nelygybių su dviem kintamaisiais sistemos

Nors šiame skyrelyje nagrinėjama medžiaga ir nėra sudėtinga, bet ją rekomenduojame nagrinėti tik su mokiniais, kurie planuoja vidurinėje mokykloje matematiką mokytis išplėstiniu lygiu.

Pakartoti:

nelygybių su vienu kintamuoju sprendimą;
kas yra lygties $ax + by = c$ grafikas ir kas yra tokios lygties sprendiniai.

Išmokti:

spręsti tiesines nelygybes su dviem kintamaisiais;
spręsti tiesinių nelygybių su dviem kintamaisiais sistemas.

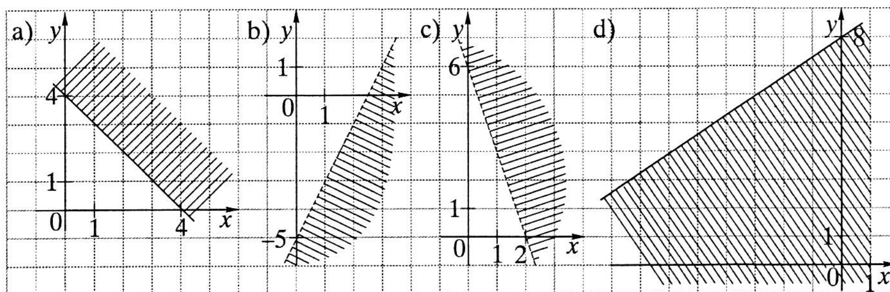
Šiame skyrelyje:

1. Įvedamos tiesinės nelygybės su dviem kintamaisiais ir jos sprendinio sąvokos bei pasakoma, ką reiškia išspręsti tokią nelygybę ir kokiu būdu ją patogu spręsti bei vaizduoti sprendinius.
2. Išsprendžiamas tiesinės nelygybės su dviem kintamaisiais pavyzdys.
3. Išsprendžiamas realiojo turinio uždavinys, iliustruojantis nelygybių su dviem kintamaisiais sistemos sprendimą. *Nurodymas.* Stipresnieji mokiniai šio uždavinio sprendimą nesunkiai turėtų išsiaiškinti savarankiškai.

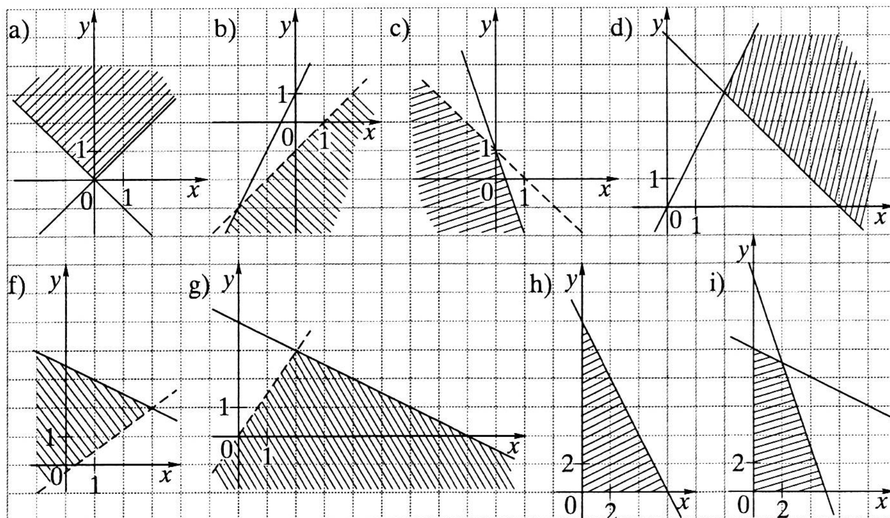
PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

225–230 uždaviniai yra teminiai, o kiti — kartojimo.

225.



226.



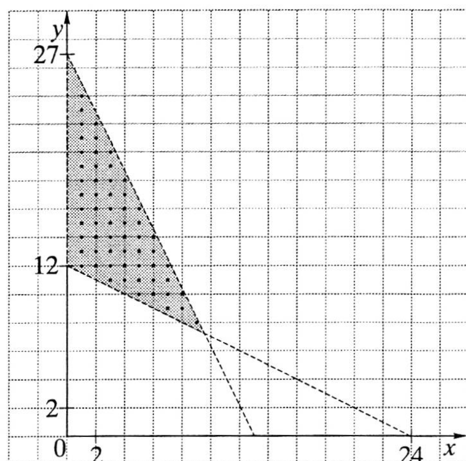
Nurodymas. e) Kadangi nelygybė $x + 2 < x$ sprendinių neturi, tai ir duotoji nelygybių sistema neturi sprendinių.

227. a) Užrašykime lygtis tiesių, ribojančių užtušuotą plokštumos dalį: $y = x$ ir $y = -x$. Toliau galima elgtis taip: pasirenkame tašką, priklausantį užtušuotai sričiai, pvz., (2; 0). Kadangi $0 < 2$, tai viena nelygybių sistemos nelygybė bus $y \leqslant x$; kadangi $0 > -2$, tai kita nelygybė bus $y \geqslant -x$. Taigi turėsime nelygybių sistemą $\begin{cases} y \leqslant x, \\ y \geqslant -x; \end{cases}$ ją galima užrašyti ir dvigubąja nelygybe: $-x \leqslant y \leqslant x$; iš jos išplaukia, kad $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ |y| \leqslant x; \end{cases}$

b) $\begin{cases} y < x + 4, \\ y \leqslant -x + 4; \end{cases}$ c) $\begin{cases} y \leqslant x + 3, \\ y \geqslant -\frac{2}{3}x - 2. \end{cases}$

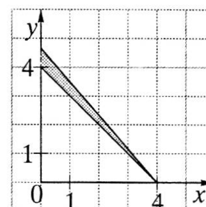
228. Sakykime, kad yra x mėlynų ir y raudonų pieštukų. Pagal sąlygą: $\begin{cases} x + 2y > 24, \\ 2x + y < 27. \end{cases}$

Gautą nelygybių sistemą išsprendžiame grafiškai. Jos sprendinius vaizduojantys taškai yra užtušuotame trikampyje. Tačiau uždavinio sąlygą tenkina tie sistemos sprendiniai, kurių $x, y \in N$; jie pavaizduoti taškais (matome, kad sprendinių yra daug).



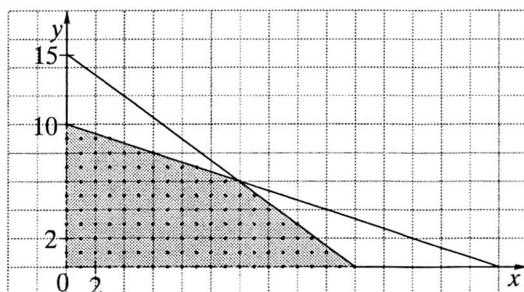
Dėžutėje galėtų būti, pavyzdžiui, 2 mėlyni ir 20 raudonų pieštukų ar 4 mėlyni ir 16 raudonų pieštukų.

229. Sakykime, kad mama nori nupirkti x kg persikų ir y kg abrikosų. Pagal sąlygą: $\begin{cases} x + y \geqslant 4, \\ 8x + 7y \leqslant 32; \end{cases}$ čia $x > 0$ ir $y > 0$.



Išsprendžiame gautą nelygybių sistemą grafiškai.
Uždavinio sprendinius vaizduojantys taškai yra užtušuotame trikampyje.
Pastaba. Klausimas sąlygoje turėtų būti toks: „Kiek *kilogramų* persikų..." Beje, jeigu reikalautume, kad x ir y būtų natūralieji skaičiai, tai būtų tik 3 sprendiniai: (1; 3), (2; 2) ir (3; 1).

230. Sakykime, kad gamykla per savaitę gali pagaminti x porų standartinių ir y porų sportinių slidžių. Pagal sąlygą: $\begin{cases} 6x + 8y \leqslant 120, \\ x + 3y \leqslant 30; \end{cases}$ $x, y \in N_0$.

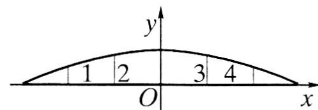


Sprendinių yra daug, juos vaizduoja užtušuotoje srityje pažymėti taškai. Beje, jei uždavinio sąlygą suformuluotume taip: „Kiek daugiausiai porų...", tai atsakymas būtų toks: gamykla standartinių slidžių porų gali pagaminti daugiausiai 20, o sportinių — daugiausiai 10.
Pastaba. Klausimas sąlygoje turėtų būti toks: „Kiek *porų* kiekvienos..."

231. a) $f(x) = \frac{x-1}{x} = -\frac{1}{x} + 1$. Taigi funkcijos $f(x)$ grafikas bus hiperbolė $y = -\frac{1}{x}$, pastumta per 1 vienetą aukštyn.
b) $f(x) = \frac{x+2}{x} = \frac{2}{x} + 1$. Taigi funkcijos $f(x)$ grafikas bus hiperbolė $y = \frac{2}{x}$, pastumta per 1 vienetą aukštyn.

232. Pagal paprastųjų palūkanų formulę $P_d = S \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{d}{360}$ diskonto suma yra:
a) $800 \cdot \frac{8}{100} \cdot \frac{70}{360} \approx 12{,}44$ (Lt); b) $1250 \cdot \frac{7{,}5}{100} \cdot \frac{90}{360} \approx 23{,}44$ (Lt).
Bankas už vieną vekselį sumoka:
a) $800 - 12{,}44 = 787{,}56$ (Lt); b) $1250 - 23{,}44 = 1226{,}56$ (Lt).

233. Papildykime brėžinį nubraižydami koordinačių ašis.



Matome, kad parabolės šakos nukreiptos žemyn. Kadangi arkos aukštis yra 14,4 m, tai parabolės viršūnė yra taške (0; 14,4). Taigi turime funkciją $f(x) = ax^2 + 14{,}4$ ($a < 0$). Kadangi tilto ilgis yra 120 m, o parabolė yra simetriška Oy ašies atžvilgiu, tai taškų, kuriuose ji kerta x ašį, koordinatės yra $(-60; 0)$ ir $(60; 0)$. Šių taškų koordinatės turi tenkinti parabolės lygtį: $y = ax^2 + 14{,}4$. Vadinasi, $a \cdot 60^2 + 14{,}4 = 0$, $a = -0{,}004$. Taigi $f(x) = -0{,}004x^2 + 14{,}4$. Pastebėkime, kad atramų 1 ir 4; 2 ir 3 ilgiai yra vienodi. Atstumai tarp atramų yra $120 : 6 = 20$ (m). Atramų ilgius sužinosime apskaičiavę $f(20)$ ir $f(40)$. 1-os ir 4-os atramų ilgiai yra $f(40) = -0{,}004 \cdot 40^2 + 14{,}4 = 8$ (m); 2-os ir 3-ios atramų ilgiai yra $f(20) = -0{,}004 \cdot 20^2 + 14{,}4 = 12{,}8$ (m).

234. Ne. Jeigu trapecijos pagrindų ilgiai yra a ir b, tai susidariusių trapecijų atitinkamų pagrindų santykiai yra $\frac{2b}{a+b}$ ir $\frac{a+b}{2a}$. Jeigu tie santykiai būtų lygūs, gautume $\frac{2b}{a+b} = \frac{a+b}{2a}$, $(a+b)^2 = 4ab$, $(a-b)^2 = 0$, $a = b$. Bet trapecijos pagrindai negali būti lygūs (kitaip to keturkampio priešingos kraštinės būtų lygios ir lygiagrečios, ir keturkampis būtų lygiagretainis). Įrodėme, kad trapecijai tie santykiai negali būti lygūs. Vadinasi, kraštinės nėra proporcingos.
Sprendimą galima užrašyti ir prieštaros metodu.
Kadangi trapecijoje $a \neq b$, tai pagrindų santykių skirtumas $\frac{2b}{a+b} - \frac{a+b}{2a} = \frac{4ab-(a+b)^2}{2a(a+b)} = -\frac{(a-b)^2}{2a(a+b)} \neq 0$, taigi susidariusios trapecijos nėra panašios.

235. a) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-4)^2} = |2-\sqrt{3}| - |\sqrt{3}-4| = 2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-4 = -2$;
b) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(2+\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| + |2+\sqrt{5}| = -(2-\sqrt{5})+2+\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

236. **D**. *Nurodymas*. Sunumeruokite visas brėžinyje esančias dalis. Suskaičiuokite kvadratus, kurie sudaryti iš vienos iš pažymėtų dalių, po to — iš dviejų ir t. t.

4. KVADRATINĖS NELYGYBĖS

Pagrindinėje mokykloje nagrinėjamos tiesinės ir kvadratinės nelygybės. Spręsti tiesines nelygybes buvo mokoma 8 klasėje (Matematika 8, II dalis, 7 skyrius). 9 klasėje nelygybės nebuvo nagrinėjamos, tik stipresniems mokiniams kaip neprivaloma medžiaga buvo parodyta, kaip grafiškai galima spręsti kvadratines nelygybes (Matematika 9, I dalis, 2 skyrius, 7 skyrelis, 88 p.). Todėl prieš pradedant mokyti spręsti kvadratines nelygybes reikėtų su silpnesniais mokiniais prisiminti skaitinių nelygybių savybes ir ką vadiname nelygybės sprendiniu.

Šiame skyriuje svarbiausia išmokyti visus mokinius spręsti kvadratines nelygybes. Čia, kaip ir kvadratinių lygčių atveju, pirmiausia kvadratines nelygybes mokoma spręsti grafiškai (1 skyrelis), o po to — algebriškai (2 skyrelis).

Nurodymas. Nerekomenduojame kvadratinių nelygybių spręsti intervalų metodu. Intervalų metodą tikslinga taikyti sprendžiant aukštesnio negu antrojo laipsnio nelygybes ir nelygybes, kurių kintamasis yra vardiklyje, bet tokios nelygybės yra nagrinėjamos vidurinėje mokykloje. Aišku, stipresniems mokiniams pravartu susipažinti su tokių nelygybių sprendimu (3 skyrelis) jau pagrindinėje mokykloje.

4 skyrelyje kaip neprivaloma medžiaga nagrinėjamos netiesinių nelygybių sistemos. Nors tas skyrelis ir nėra privalomas, bet jį suprasti gali ir vidutinio lygio mokiniai.

Minimalus lygmuo:

1. Atpažinti kvadratinę nelygybę.
2. Nustatyti, ar duotasis skaičius yra nelygybės sprendinys.
3. Žinoti, kaip nuo dauginamųjų ženklų priklauso sandaugos ženklas.
4. Gebėti algebriškai išspręsti kvadratinę nelygybę.

Pagrindinis lygmuo:

5. Gebėti braižant funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikus nurodyti nelygybės $f(x) < g(x)$ (ir nelygybių su ženklais $>$, $\geqslant$, $\leqslant$) sprendinius, kai $f(x)$ ir $g(x)$ yra arba tiesinės, arba kvadratinės funkcijos.

Aukštesnis lygmuo:

6. Spręsti nelygybių sistemas, kai bent viena sistemos nelygybė yra kvadratinė.
7. Gebėti spręsti nelygybes, kurių pavidalas yra $(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) > 0$ (ir nelygybes su ženklais $\geqslant$, $<$, $\leqslant$).
8. Suprasti intervalų metodo esmę.
9. Spręsti nelygybes, kai nežinomasis yra vardiklyje (racionaliąsias nelygybes).

4.1. Kvadratinių nelygybių grafinis sprendimas

Grafiniam sprendimo būdui (lygčių ir nelygybių) naujuosiuose vadovėliuose skiriama daug dėmesio (lyginant su ankstesniaisiais vadovėliais). Sprendžiant kvadratines nelygybes grafiškai reikia mokėti braižyti kvadratinės ir tiesinės funkcijų grafikus. (Tiesinės ir kvadratinės funkcijos buvo nagrinėjamos 9 klasėje, žr. Matematika 9, I dalis, 1 ir 2 skyriai.)

Todėl prieš pradedant nagrinėti šį skyrelį reikėtų prisiminti funkcijų $f(x) = ax + b$ ir $f(x) = ax^2 + bx + c$ grafikų braižymą.

Pagrindinis šio skyriaus tikslas — siekti, kad mokiniai suprastų, kaip grafiškai galima spręsti nelygybes, kurių pavidalas yra $f(x) < g(x)$ ($>$, $\geqslant$, $\leqslant$).

Pastabos. 1) Šio skyrelio medžiaga glaudžiai siejasi su praeito skyrelio (3.2. Tiesinių nelygybių su dviem kintamaisiais sistemos) medžiaga. Todėl nagrinėjusiems tą skyrelį šią medžiagą turėtų būti nesunku įsisavinti.

2) Praktiškai sprendžiant kvadratines nelygybes patogu derinti algebrinį sprendimą su grafiniu. Todėl grafiniam kvadratinių nelygybių sprendimui vertėtų skirti nemažai laiko.

Pakartoti:

ką vadiname nelygybės sprendiniu;
intervalų rūšis, nelygybės sprendinių rašymą intervalais;
tiesinių ir kvadratinių funkcijų grafikų braižymą;
ką parodo dviejų funkcijų grafikų bendrieji taškai.

Išmokti:

atpažinti kvadratines nelygybes;
grafiškai spręsti kvadratines nelygybes.

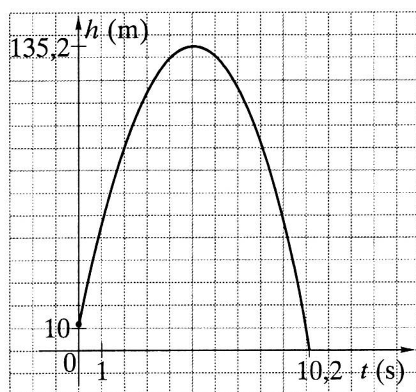
Šiame skyrelyje:

1. Pateikiamas uždavinys siekiant:
   - parodyti, kaip galima gauti nelygybę, kurios kintamojo aukščiausias laipsnis yra 2 (įvesti kvadratines nelygybes);
   - pakartoti kvadratinės funkcijos grafiko (parabolės) ir tiesės $y = a$ braižymą;
   - paaiškinti kvadratinės nelygybės grafinio sprendimo būdo esmę.

Nurodymai. 1) Uždavinys nėra lengvas, kaip gali pasirodyti iš pirmo žvilgsnio. Be to, šiuo uždaviniu keliama daug tikslų. Todėl jo nagrinėjimui reikia skirti pakankamai dėmesio ir laiko.

2) Pirmiausia su mokiniais išsiaiškinkite sąlygą ir brėžinį. Paklauskite mokinių, kas atidėta x, kas — y ašyje. Atkreipkite mokinių dėmesį, kad šiame brėžinyje pavaizduota kamuolio lėkimo *trajektorija*. 9 klasėje (žr. Matematika 9, I dalis, 14 p.) grafiškai buvo pavaizduota strėlės aukščio priklausomybė nuo strėlės lėkimo laiko. Ten nubraižytoji parabolė *nevaizdavo* strėlės realios lėkimo trajektorijos. Tą nagrinėtą situaciją galite priminti mokiniams:

Iš 10,2 *m aukščio vertikaliai aukštyn iš lanko paleista strėlė. Srėlės aukščio h (metrais) priklausomybė nuo laiko t (sekundėmis) pavaizduota grafiškai.*



Strėlės aukščio h priklausomybę nuo laiko t galima užrašyti formule $h(t) = 10{,}2 + 50t - 5t^2$.

Pasiūlykite mokiniams nustatyti, pavyzdžiui, kuriuo laiko tarpu nuo paleidimo pradžios strėlė buvo pakilusi virš žemės aukščiau negu 90 m; žemiau negu 60 m.

Vadovėlyje nepateikiama uždavinių, analogiškų teorinėje dalyje nagrinėtam uždaviniui. Tokių uždavinių mokytojas gali sugalvoti naudodamasis 9 klasės vadovėlio I dalyje esančiais uždaviniais: 230, 232, 234, 235, 236.

3) Atlikdami 1 užduoties pirmąją dalį mokiniai turi prisiminti, kaip užrašyti parabolės lygtį, kai žinomos trijų jos taškų koordinatės. Šiuo atveju žinome, kad parabolė x ašį kerta taškuose (0; 0) ir (40; 0). Nesunkiai randame parabolės viršūnės taško koordinates $(\frac{0+40}{2}; 10)$, t. y. (20; 10). Remdamiesi parabolės lygtimi $y = ax^2 + bx + c$ randame:

kai $x = 0$ ir $y = 0$, tai $c = 0$, vadinasi, $y = ax^2 + bx$;

kai $x = 40$ ir $y = 0$, tai $b = -40a$, vadinasi, $y = ax^2 - 40ax$;

kai $x = 20$ ir $y = 10$, tai $10 = 400a - 800a$, $a = -\frac{1}{40}$, vadinasi, $y = -\frac{1}{40}x^2 + x$.

Aišku, remiantis tuo, kad parabolė eina per koordinačių pradžią, jos lygtį galima gauti ir iš lygties $y = ax(x-40)$. Šią užduoties dalį rekomenduokite atlikti stipresniems mokiniams, o silpnesniems galima tik pasakyti, kad nubraižytos parabolės lygtis yra $y = -\frac{1}{40}x^2 + x$.

4) Mokiniams reikia priminti, kad remdamiesi grafiniu vaizdu dažniausiai galime nustatyti tik apytikslius sprendinius. Bet vadovėlyje pateiktas pavyzdys su tiksliais sprendiniais. Tuo mokiniai įsitikins atlikdami antrąją 1 užduoties dalį — spręsdami lygtį $-\frac{1}{40}x^2 + x = 1{,}9$.

5) Svarbiausia šiuo uždaviniu pasiekti, kad mokiniai suvoktų, kaip galima grafiškai spręsti kvadratines nelygybes. Čia mokytojui būtų tikslinga remiantis brėžiniu nusakyti algoritmą, kaip grafiškai galima spręsti nelygybę

$$-\frac{1}{40}x^2 + x > 1{,}9:$$

- braižome parabolę $y = -\frac{1}{40}x^2 + x$;
- brėžiame tiesę $y = 1{,}9$;
- randame tas x reikšmes, su kuriomis parabolė yra virš tiesės.

Pasiūlykite mokiniams pasakyti analogiškų nelygybių su ženklais $\geqslant$, $<$, $\leqslant$ sprendinius.

2. Pateikiami du pavyzdžiai iliustruojantys, kaip grafiškai galima spręsti kvadratines nelygybes.

Nurodymai. 1) Čia siekiama parodyti, kad nelygybių $ax^2 < bx + c$, $ax^2 - bx < c$ ir $ax^2 - bx - c < 0$ sprendiniai yra tie patys. Silpnesniems mokiniams vertėtų rekomenduoti spręsti kvadratines nelygybes pirmiausia suteikiant joms pavidalą $ax^2+bx+c < 0$ ($>$, $\leqslant$, $\geqslant$) ir braižant parabolę $y = ax^2 + bx + c$ bei tiesę $y = 0$ (kurios, beje, ir brėžti nereikia; žr., pavyzdžiui, 2 užduotį). Šiuo atveju priklausomai nuo nelygybės ženklo tereikia nustatyti, kuriuose intervaluose parabolė yra virš (žemiau) x ašies. Patogu taip pat kvadratines nelygybes spręsti suteikiant joms pavidalą $ax^2 + bx < c$ ($>$, $\leqslant$, $\geqslant$). Šis pavidalas yra patogus tuo, kad palyginti nesunku nubraižyti parabolę $y = ax^2 + bx$ bei tiesę $y = c$. Žinoma, dažniausiai patogu remtis parabole $y = x^2$ — prie jos esame labiausiai pripratę. Pavyzdžiui, uždavinį 240e galima būtų spręsti taip: $x^2 \geqslant -3x - 2$. Dabar braižome parabolę $y = x^2$ ir tiesę $-3x - 2$.

2) Kvadratines lygtis sprendžiant grafiškai tenka ieškoti parabolės ir tiesės susikirtimo taškų x koordinačių. Remiantis brėžiniu tikslias koordinates dažnai būna sunku nustatyti. Mokiniams galima patarti algebriškai rasti parabolės ir tiesės susikirtimo taškų abscises, išsprendus atitinkamą kvadratinę lygtį.

237–241 yra teminiai uždaviniai, o likę — kartojimo. 1, 2

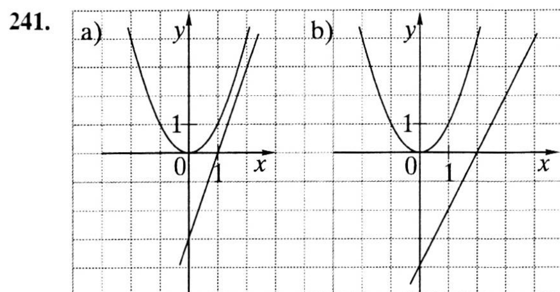
237. a), c), d), e).

238. a) $x < -2$, $x > 2$; b) $-2 \leqslant x \leqslant 2$; c) $-3 \leqslant x \leqslant 3$; d) $x < -3$, $x > 3$.

239. a) $(-\infty; -2]$, $[2; +\infty)$; b) $[-2; 2]$; c) $[-1; 1]$; d) $[-2; 2]$.

240. a) $[-0{,}5; 2]$; b) sprendinių nėra; c) $\approx (-\infty; -0{,}3]$, $[2; +\infty)$; d) 3;
e) $(-\infty; -2]$, $[-1; +\infty)$; f) $[-1; 3]$.

241.



a) Kadangi visi parabolės $y = x^2$ taškai yra virš atitinkamų tiesės $y = 3x - 3$ taškų, tai su bet kuria x reikšme $x^2 > 3x - 3$. Taigi nelygybė $x^2 < 3x - 3$ sprendinių neturi.

b) Kadangi visi parabolės $y = x^2$ taškai yra virš atitinkamų tiesės $y = 2x - 4$ taškų, tai su visomis x reikšmėmis $x^2 > 2x - 4$. Taigi nelygybės $x^2 > 2x - 4$ sprendinys yra bet kuris skaičius.

242. **B**.

243. a) $(-2; 0)$, $(2; +\infty)$; b) $(0; 2)$, $(4; +\infty)$.

244. a) 3307,5 Lt; b) 3312,78 Lt; c) 3310,11 Lt; d) 3311,44 Lt.

245. a) $(9; 4)$; b) $(-1; -3)$.

246. a) $17 - \sqrt{2}$; b) 3.

247. Abi lygybės $x + \frac{1}{x} = 6$ puses pakelkime kvadratu. Gausime:
$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 36$; $x^2 + \frac{1}{x^2} = 34$.

248. 22.

249. Aštuonių pažymių suma lygi $6 \cdot 8 = 48$. Gavus tris pažymius Agnė turės 11 pažymių. Jų suma turi būti $7 \cdot 11 = 77$. Vadinasi, trijų gautų pažymių suma turi būti $77 - 48 = 29$. Taigi galimas tik vienas atvejis — Agnė turi gauti 9, 10 ir 10.
Atsakymas. 9, 10, 10.

250. a) $\left[-1; -\frac{1}{3}\right)$; b) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$.

251. a) $V = 25 \cdot 55 \cdot 20 + 70 \cdot 100 \cdot 45 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 30^2 \cdot 70 = 342\,500 - 31\,500\pi \approx$
$\approx 243\,590\,(\text{mm}^3)$;
b) $S = 28\,850 + 1200\pi \approx 32\,618\,(\text{mm}^2)$.

252. a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{7}{36}$.

253. Tarp dviejų penktadienių, kurie yra porinės dienos, yra penktadienis — neporinė diena. Kadangi trys penktadieniai buvo porinės dienos, tai du penktadieniai buvo neporinės dienos. Mėnesio, turinčio tris porinius penktadienius, penktadieniai gali būti tik dienos: 2, 9, 16, 23, 30. Tuomet to mėnesio 18-oji diena buvo sekmadienis.
Atsakymas. Sekmadienis.

4.2. Kvadratinių nelygybių algebrinis sprendimas

Šiame skyrelyje mokoma kvadratines nelygybes spręsti nebraižant grafikų. Algebrinis kvadratinių nelygybių sprendimas remiasi faktais, kad dviejų tiesinių dauginamųjų sandauga yra:

- teigiama, kai abu dauginamieji yra vienodų ženklų (arba abu teigiami, arba abu neigiami);
- neigiama, kai abu dauginamieji yra skirtingų ženklų (vienas teigiamas, kitas — neigiamas);
- lygi nuliui, kai bent vienas iš dauginamųjų lygus nuliui.

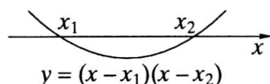
Nurodymai. 1) Praktiškai kvadratines nelygybes $ax^2 + bx + c < 0$ ($>$, $\leqslant$, $\geqslant$) spręsti vadovėlyje nagrinėjamu būdu nėra labai patogu, nes tenka kvadratinį trinarį skaidyti dauginamaisiais ir iš nelygybės $a(x - x_1)(x - x_2) < 0$ ($>$, $\leqslant$, $\geqslant$) padaryti dvi tiesinių nelygybių sistemas:

$$\begin{cases} x - x_1 < 0 & (>, \leqslant, \geqslant), \\ x - x_2 > 0 & (<, \geqslant, \leqslant); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - x_1 > 0 & (<, \geqslant, \leqslant), \\ x - x_2 < 0 & (>, \leqslant, \geqslant), \end{cases}$$

kurių sprendiniai ir yra duotosios nelygybės sprendiniai.

Dažnai mokiniams patogiau būna išskaidžius kvadratinį trinarį dauginamaisiais gautąją nelygybę $a(x - x_1)(x - x_2) < 0$ ($>$, $\leqslant$, $\geqslant$) spręsti braižant parabolės $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ (arba parabolės $y = (x - x_1)(x - x_2)$, jei prieš tai nelygybė buvo padalyta iš $a \neq 0$) eskizą. Parabolę $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ nesunku nubraižyti, nes iš šios išraiškos matome, kad parabolė kerta x ašį taškuose x_1 ir x_2, o jos šakų kryptį parodo koeficiento a ženklas (aišku, nelygybei galima suteikti pavidalą, kur $a = 1$). Belieka remiantis brėžiniu



priklausomai nuo nelygybės ženklo parašyti atsakymą. Toks sprendimas parodomas 4.4 skyrelyje, aiškinant netiesinių nelygybių sistemų sprendimą (98–100 p.).

2) Stipresniems mokiniams galima pasiūlyti algebriškai išspręsti paprastas racionaliąsias nelygybes, pavyzdžiui: $\frac{x-2}{x-5} > 0$, $\frac{2x+3}{5-x} \leqslant 0$.

Pakartoti:

kvadratų skirtumo formulę;
bendrojo dauginamojo iškėlimą prieš skliaustus;
kvadratinio trinario skaidymą dauginamaisiais;
kada dviejų dauginamųjų sandauga yra teigiama, kada neigiama, kada lygi 0;
tiesinių nelygybių su vienu kintamuoju sprendimą.

Išmokti algebriškai spręsti kvadratines nelygybes.

Šiame skyrelyje:

1. Pateikiamas keturių kvadratinių nelygybių algebrinis sprendimas (1–4 pavyzdžiai).

   Nurodymai. 1) Pirmame ir trečiame pavyzdžiuose kvadratinis trinaris turi šaknis, todėl jį galima išskaidyti dauginamaisiais. Tokiu atveju nelygybės sprendiniai yra arba vienas intervalas (1 pavyzdys), arba du intervalai (3 pavyzdys), — tai priklauso nuo nelygybės ženklo.

   2) Antrame ir ketvirtame pavyzdžiuose kvadratinio trinario dauginamaisiais išskaidyti negalima. Tokiu atveju nelygybės sprendiniai yra arba visi skaičiai (2 pavyzdys), arba nelygybė sprendinių neturi (4 pavyzdys).

   3) Visus šiuos atvejus būtina išnagrinėti. Reikėtų atkreipti mokinių dėmesį į nepilnųjų kvadratinių nelygybių sprendimą:
   - kai $c = 0$, $b \neq 0$, $a \neq 0$, tai turime kvadratinę nelygybę, kurios pavidalas yra $ax^2 + bx < 0$ ($>$, $\leqslant$, $\geqslant$). Iš čia $x(ax + b) < 0$ — lengvai išskaidome dauginamaisiais;
   - kai $b = 0$, $c \neq 0$, $a \neq 0$, tai $ax^2 + c < 0$ ($>$, $\geqslant$, $\leqslant$). Šios nelygybės kairiosios pusės negalima išskaidyti dauginamaisiais, kai a ir c yra vienodų ženklų (žr. 4 pavyzdį), o kai a ir c yra skirtingų ženklų, tai dauginamaisiais patogu skaidyti remiantis kvadratų skirtumo formule (žr. 3 pavyzdį).
2. Po pirmaisiais trimis pavyzdžiais pateikiami klaustuku pažymėti uždaviniai. Jie skirti parodyti, kaip nelygybės sprendiniai priklauso nuo nelygybės ženklo. Čia mokytojas gali pasiūlyti mokiniams parašyti atsakymus su visais įmanomais nelygybės ženklais.
3. Po pirmojo ir trečiojo pavyzdžio pateikiama lentelė, kuria remiantis galima nustatyti sandaugos $(x - x_1)(x - x_2)$ ženklą. Tokiu atveju nereikia sudarinėti ir spręsti tiesinių nelygybių sistemų. Šią lentelę galima laikyti intervalų metodu, kuris bus aiškinamas kitame — neprivalomame skyrelyje. Nebūtina mokyti sudarinėti tokias lenteles ir jomis remtis sprendžiant uždavinius.
4. Teorinės dalies pabaigoje pateikiama lentelė, kuri savotiškai sujungia grafinį ir algebrinį kvadratinių lygčių sprendimo būdus.

   Nurodymas. Galima pasiūlyti mokiniams aukščiau pateiktus pavyzdžius priskirti lentelės langeliams, o tuštiems langeliams liepti sugalvoti savų pavyzdžių.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai yra 254–275 uždaviniai, o kiti — kartojimo.

3–33, 54, 56, 58, 61

254. Taip.

255. a) $[-2; 2]$; b) $(-\infty; -3)$, $(3; +\infty)$; c) $(-\infty; -7]$, $[7; +\infty)$; d) $[-8; 8]$; e) $(-\infty; -5)$, $(5; +\infty)$; f) $(-1; 1)$; g) $(-\infty; -0{,}4]$, $[0{,}4; +\infty)$; h) $\varnothing$.
Nurodymas. Stipresniems moksleiviams galima parodyti, kaip traukiant kvadratinę šaknį galima spręsti nelygybes, kurių pavidalas yra $x^2 < a$ ($>$, $\leqslant$, $\geqslant$), čia $a > 0$.
a) Iš abiejų nelygybės $x^2 \leqslant 4$ pusių ištraukiame kvadratinę šaknį: $|x| \leqslant 2$. Iš čia $-2 \leqslant x \leqslant 2$;
c) $x^2 - 49 \geqslant 0$, $x^2 \geqslant 49$, $|x| \geqslant 7$, $x < -7$ ir $x > 7$.

256. a) $[-4; 0]$; b) $(0; 1{,}3)$; c) $(-1{,}5; 0)$; d) $(-\infty; 0)$, $(3; +\infty)$; e) $(-\infty; -1]$, $[7; +\infty)$; f) $(-\infty; +\infty)$; g) $(-\infty; +\infty)$; h) $(1; 4)$; i) $[2; 3]$; j) $[1; 17]$; k) $\left(-\infty; -\frac{4}{5}\right)$, $(2; +\infty)$; l) $(-\infty; -6]$, $[3; +\infty)$.
Nurodymai. 1) a)–d) atvejai teorinėje dalyje nebuvo nagrinėti, bet jie yra svarbūs; k) ir l) nelygybes galima spręsti dvejopai: keliant kvadratu arba iš karto skaidyti dauginamaisiais taikant kvadratų skirtumo formulę. Čia stipresniems mokiniams galima pasiūlyti išspręsti nelygybes, pavyzdžiui: $(3 - 5x)^2 > -49$, $81 + (3 + 2x)^2 \leqslant 0$.
2) Labai svarbu su moksleiviais išnagrinėti tuos atvejus, kai kvadratinio trinario diskriminantas yra neigiamas. Mokiniams tai asocijuojasi su kvadratinės lygties sprendimu ir jie automatiškai rašo, kad nelygybė sprendinių neturi.

257. Kad nelygybę $x^2 + cx + 4 > 0$ tenkintų visos x reikšmės, kvadratinio trinario $x^2 + cx + 4$ diskriminantas turi būti neigiamas, t. y. $c^2 - 16 < 0$; $-4 < c < 4$.
Nurodymai. 1) Mokiniai gali samprotauti taip: kadangi parabolės $y = x^2 + {}$ $+ cx + 4$ šakos nukreiptos aukštyn ($a > 1$), tai nelygybė $x^2 + cx + 4 > 0$ bus visada teisinga, kai visa parabolė bus virš x ašies. O taip bus, kai ji nekirs x ašies. Vadinasi, lygtis $x^2 + cx + 4 = 0$ turi neturėti sprendinių, t. y. diskriminantas turi būti neigiamas.
2) Galima pasiūlyti mokiniams rasti c reikšmes, kad nelygybė turėtų vieną sprendinį; paklausti, ar gali duotosios nelygybės sprendiniai būti vienas intervalas.

258. *I būdas.*
a) $x^2 - 6x + 10 = (x^2 - 6x + 9) + 1 = (x - 3)^2 + 1 > 0$ su visomis x reikšmėmis;
b) $-x^2 + 20x - 200 = -(x^2 - 20x + 200) = -((x^2 - 20x + 100) + 100) = {}$ $= -((x - 10)^2 + 100) < 0$ su visomis x reikšmėmis.
II būdas.
a) Išspręskime nelygybę $x^2 - 6x + 10 > 0$ ir įsitikinkime, kad kiekvienas skaičius yra šios nelygybės sprendinys. Kadangi koeficientas prie x^2 yra teigiamas, o kvadratinio trinario $x^2 - 6x + 10$ diskriminantas yra neigiamas, tai $x^2 - 6x + 10 > 0$ su visomis x reikšmėmis.
b) Sprendžiame nelygybę $-x^2 + 20x - 200 < 0$. Kadangi koeficientas prie x^2 yra neigiamas, o kvadratinio trinario $-x^2 + 20x - 200$ diskriminantas irgi yra neigiamas, tai $-x^2 + 20x - 200 < 0$ su visomis x reikšmėmis.
Pastaba. Padauginę nelygybės $-x^2 + 20x - 200 < 0$ abi puses iš -1 gautume analogišką atvejį kaip ir a) punkte.

259. Reiškinys $\sqrt{4 - x^2}$ apibrėžtas su tais x, su kuriais $4 - x^2 \geqslant 0$, t. y. $-2 \leqslant x \leqslant 2$.
Atsakymas. **D**.

260. Kvadratinė lygtis neturi sprendinių, kai jos diskriminantas yra neigiamas.
a) $2x^2 + ax + 8 = 0$; $D = a^2 - 64$; $a^2 - 64 < 0$, $-8 < a < 8$;
b) $x^2 + ax + 25 = 0$; $D = a^2 - 100$; $a^2 - 100 < 0$, $-10 < a < 10$.
Atsakymas. a) $-8 < a < 8$; b) $-10 < a < 10$.

261. a) Kvadratinė lygtis turi du realius skirtingus sprendinius, kai jos diskriminantas yra teigiamas.
$x^2 + 2mx + m = 0$; $D = 4m^2 - 4m$; $4m^2 - 4m > 0$, $m < 0$ ir $m > 1$.
b) Išskirkime reikšmę $m = 0$; kai $m = 0$, tai lygtis $mx^2 + 5x + 4m = 0$ nėra kvadratinė ir neturės dviejų realių skirtingų sprendinių. Kai $m \neq 0$, tai lygtis $mx^2 + 5x + 4m = 0$ turės du realius skirtingus sprendinius, kai $D > 0$, t. y. $25 - 16m^2 > 0$, $-\frac{5}{4} < m < \frac{5}{4}$. Vadinasi, kai $-\frac{5}{4} < m < \frac{5}{4}$ ir $m \neq 0$, tai lygtis turės du realius skirtingus sprendinius.
Atsakymas. a) $m < 0$ ir $m > 1$; b) $-\frac{5}{4} < m < 0$ ir $0 < m < \frac{5}{4}$.

262. Kai $n = 2$, tai nelygybė $n^2 - n > 3n - 4$ yra neteisinga.

263. a) $[3; +\infty)$; b) $[-5{,}5; 0)$.

264. Išsprendę nelygybę $-6x^2 + 13x + 15 > 0$ gauname, kad jos sprendiniai sudaro intervalą $\left(-\frac{5}{6}; 3\right)$. Intervalui $[-1; 0]$ priklausantys nelygybės sprendiniai sudarys intervalą $\left(-\frac{5}{6}; 0\right]$.

265. a) ir c). *Nurodymas.* Kvadratinė nelygybė $ax^2+bx+c > 0$, $a > 0$, yra teisinga su visomis x reikšmėmis, kai kvadratinio trinario $ax^2 + bx + c$ diskriminantas yra neigiamas.

266. a) Kadangi reiškinio $\frac{5}{a^2+3a}$ skaitiklis yra teigiamas, tai šis reiškinys įgis teigiamas reikšmes, kai vardiklis bus teigiamas, t. y. $a^2 + 3a > 0$, $a < -3$ arba $a > 0$.

b) Kadangi reiškinio $\frac{4}{10m-5m^2}$ skaitiklis yra teigiamas, tai šis reiškinys įgis neigiamas reikšmes, kai vardiklis bus neigiamas, t. y. $10m - 5m^2 < 0$, $m < 0$ arba $m > 2$.

Atsakymas. a) $a < -3$, $a > 0$; b) $m < 0$, $m > 2$.

267. *Nurodymas.* Prieš pradėdami spręsti šį uždavinį su moksleiviais prisiminkite, kad seka — tai funkcija, apibrėžta *natūraliųjų* skaičių aibėje, bet tos funkcijos reikšmės — sekos nariai gali būti tiek teigiami, tiek neigiami skaičiai, pavyzdžiui: a) $a_n = -n^2 + 6n + 16$; kai $n = 1$, tai $a_1 = 21$; kai $n = 10$, tai $a_{10} = -24$.

Reikės išspręsti nelygybę:

a) $-n^2 + 6n + 16 > 0$ ir $n \in \boldsymbol{N}$;

b) $n^2 - 8n + 7 > 0$ ir $n \in \boldsymbol{N}$;

c) $n^2 - 3{,}5n + 6 > 0$ ir $n \in \boldsymbol{N}$.

Atsakymas. a) $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$; b) $n = 8, 9, 10, \ldots$; c) $n = 1, 2, 3, \ldots$.

268. Sakykime, kad stačiakampio ilgis turi būti x m, o plotis — y m.

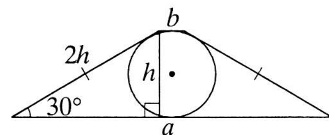
a) Pagal sąlygą $2x + 2y = 12$ ir $xy \geqslant 8$. Iš lygties $2x + 2y = 12$ išreiškę y-ą ir įstatę į nelygybę $xy \geqslant 8$ gausime, kad $2 \leqslant x \leqslant 4$; kadangi $y = 6 - x$, tai y įgis reikšmes iš intervalo $[2; 4]$.

b) $S = xy = x(6 - x) = 6x - x^2$. Stačiakampio plotas S — x-o kvadratinė funkcija. Jos grafikas — parabolė, kurios šakos nukreiptos žemyn, o viršūnės abscisė $x_0 = \frac{6+0}{2} = 3$. Parabolės $y = 6x - x^2$ viršūnės ordinatė atitinka didžiausią funkcijos reikšmę. Taigi funkcija įgis didžiausią reikšmę, kai $x = 3$. Tada kita stačiakampio kraštinė yra $y = 6 - x = 6 - 3 = 3$. Vadinasi, stačiakampis yra kvadratas.

Nurodymas. Aptarkite su mokiniais gautos funkcijos apibrėžimo sritį (intervalas $(0; 6)$) ir pastebėkite, kad funkcijos reikšmės gali būti tik teigiami skaičiai.

269. 1) *Pastaba.* Uždavinio formuluotėje yra klaida. Turi būti: „... trapecijos plotas S lygus *dvigubam* aukštinės ilgio h kvadratui, t. y. $S = 2h^2$."

Trapecijos plotas $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$. Remdamiesi statinio, esančio prieš 30° kampą, savybe gauname, kad trapecijos šoninės kraštinės ilgis lygus dvigubam aukštinės ilgiui, t. y. $2h$. Remdamiesi apibrėžtinio keturkampio savybe gauname, kad $a + b = 2h + 2h = 4h$. Tada $S = \frac{4h}{2} \cdot h = 2h^2$.



2) $4 \leqslant S \leqslant 9$; $4 \leqslant 2h^2 \leqslant 9$, $2 \leqslant h^2 \leqslant 4{,}5$, $\sqrt{2} \leqslant h \leqslant \sqrt{4{,}5}$. Taigi aukštinės ilgis turėtų būti ne mažesnis už $\sqrt{2}$ cm ir ne didesnis už $\sqrt{4{,}5}$ cm.

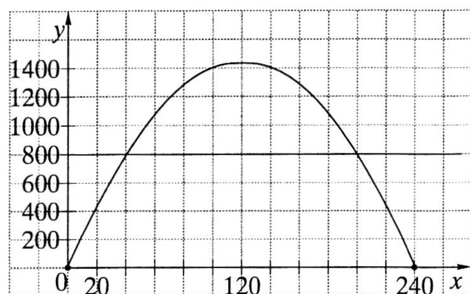
270. *Nurodymas.* Būtina gerai išnagrinėti ir suprasti sąlygą. Moksleiviams gali iškilti sunkumų, kas formulėje pažymėta x ir kas — $f(x)$.

a) $-0{,}1x^2 + 24x > 800$, $40 < x < 200$. Taigi norint, kad pelno pokytis būtų didesnis už 800 Lt, į 1 ha reikėtų berti daugiau negu 40 kg, bet mažiau negu 200 kg trąšų.

b) Funkcijos $f(x) = -0{,}1x^2 + 24x$ grafikas — parabolė, kurios šakos nukreiptos žemyn, o viršūnės abscisė $x_0 = 120$. Parabolės viršūnės ordinatė atitinka didžiausią funkcijos reikšmę. Taigi funkcija įgis didžiausią reikšmę, kai $x = 120$. Vadinasi, pelno pokytis bus didžiausias, kai į 1 ha išbersime 120 kg trąšų.

c) Kai $0 < x < 120$, tai funkcijos $f(x) = -0{,}1x^2 + 24x$ reikšmės didėja; kai $120 < x < 240$, tai funkcijos $f(x)$ reikšmės mažėja. Vadinasi, išberiamų trąšų kiekį didinant iki 120 kg, pelno pokytis didėja; didinant nuo 120 kg iki 240 kg, pelno pokytis mažėja.

Pastaba. Silpnesnieji moksleiviai galėtų atsakyti į klausimus nubraižę parabolę $y = -0,1x^2 + 24x$ ir tiesę $y = 800$.



271. Reikia išspręsti nelygybę:

a) $4x - x^2 > 4$, $(x-2)^2 < 0$. Kadangi $(x-2)^2 \geqslant 0$, tai nelygybė $(x-2)^2 < 0$ sprendinių neturi. Vadinasi, nėra tokių x reikšmių, su kuriomis funkcijos $f(x) = 4x - x^2$ grafiko taškai būtų aukščiau funkcijos $g(x) = 4$ grafiko taškų.

b) $x^2 - 6x < 7$, $(x-7)(x+1) < 0$, $-1 < x < 7$. Taigi, kai $-1 < x < 7$, tai funkcijos $f(x) = x^2 - 6x$ grafiko taškai yra žemiau funkcijos $g(x) = 7$ grafiko taškų.

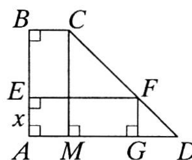
Pastaba. Silpnesnieji moksleiviai gali braižyti duotųjų funkcijų grafikus.

272. a) Prie žemės pylimo aukštis $y = 0$. Sprendžiame lygtį: $-\frac{1}{3}x^2 + 2x = 0$, $x = 0$ ir $x = 6$. Vadinasi, pylimo plotis prie žemės yra $6 - 0 = 6$ (m). (*Nurodymas.* Pakartokite, kad atstumas tarp dviejų taškų, priklausančių koordinačių ašiai, lygus tų taškų koordinačių skirtumo moduliui. Kai yra žinoma, kad tas skirtumas yra teigiamas, modulio ženklo galima ir nerašyti.) Parabolės $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$ šakos nukreiptos žemyn, viršūnės abscisė $x_0 = 3$. Kai $x = 3$, pylimo aukštis bus didžiausias ir lygus $-\frac{1}{3} \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 = 3$ (m).

b) Sprendžiame nelygybę: $-\frac{1}{3}x^2 + 2x > 1$; $3 - \sqrt{6} < x < 3 + \sqrt{6}$, t. y. maždaug $0,6 < x < 5,4$. Taigi pylimo plotis 1 m aukštyje yra maždaug $5,4 - 0,6 = 4,8$ (m). Tada pylimo plotis aukštyje, didesniame negu 1 m, įgis reikšmes iš intervalo $(0; 4,8)$.
Analogiškai randame, kad pylimo plotis aukštyje, didesniame negu 2 m, įgis reikšmes iš intervalo $(0; 3,4)$.

273. Sprendžiame nelygybę: $60t^2 + 60t + 20 > 680$, $t < \frac{-1-\sqrt{45}}{2}$ ir $t > \frac{-1+\sqrt{45}}{2}$. Kadangi laikas t negali būti neigiamas, tai lieka reikšmės $t > \frac{-1+\sqrt{45}}{2}$, t. y. maždaug $t > 2,85$. Vadinasi, traukinys bus nuvažiavęs daugiau negu 680 km maždaug po 2,85 valandų, t. y. po 2 h 51 min.

274. 1) Iš viršūnės C nubrėžkime statmenį CM į kraštinę AD. $MD = AD - AM = AD - BC = 12 - 3 = 9$ (cm). Kadangi $CM = AB = MD = 9$ cm, tai $\triangle CMD$ — status lygiašonis. Kadangi $\angle FDG = 45°$, tai $\triangle FGD$ — status lygiašonis ir $GD = FG = AE = x$. Tada $AG = AD - GD = 12 - x$ (cm) ir $S_{AEFG} = x(12 - x) = 12x - x^2$.



2) $12x - x^2 > 20$, $2 < x < 10$;

3) stačiakampio plotas didžiausias, kai $x = 6$.

275. Tai sunkokas uždavinys. Dauguma moksleivių galėtų jį spręsti tiesiog imdami n reikšmes $n = 1; 2; 3; \ldots$ ir apskaičiuodami $f(n)$ pagal pateiktą formulę. Taip surašę visas n ir atitinkamas $f(n)$ reikšmes nesunkiai galės atsakyti į abu pateiktus klausimus. Patogu susidaryti lentelę:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(x)$	210	218	222	222	218	210	198	182	162	138	110	78	42	2	−42

a) Iš lentelės matome, kad puikiausiai galėjo būti tiek 14, tiek 13, tiek ir mažesnis tarpinių stočių skaičius. O 15 tarpinių stočių būti negalėjo — kai $n = 15$, gauname $f(n) < 0$. Vadinasi, daugiausiai galėjo būti 14 tarpinių stočių.

b) Jeigu tarpinių stočių buvo 14, tai daugiausiai keleivių traukinyje buvo: kai $n = 3$ ir $n = 4$ (t. y. po trečio ir po ketvirto sustojimo).

Pastaba. Uždavinio sąlyga suformuluota nevykusiai — tarpinių stočių galėjo būti ir 14, ir 13, ..., ir net dvi ar viena (taigi nuo to priklauso ir punkto

b) atsakymas). Iš sąlygos visiškai neaišku, kas tas n (užrašas $n \in N$ tik klaidina).

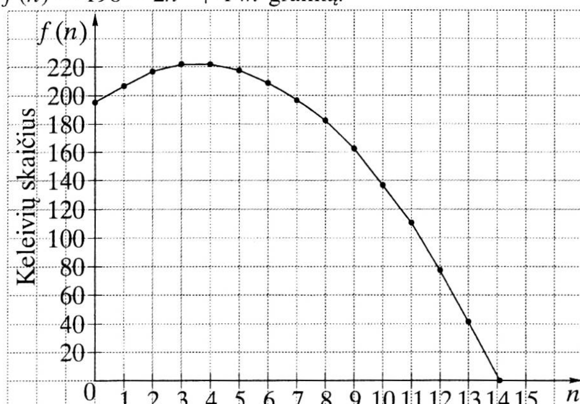
Uždavinio sąlygą reikia taisyti taip.

Traukiniu „Pajūris" *vakar* iš pradinės stoties išvažiavo 198 keleiviai. Tarpinėse stotyse vieni keleiviai išlipdavo, kiti įlipdavo. Bet traukinio palydovas, šiek tiek išmanantis matematiką, nustebo, kad kiekvienu momentu traukinyje esančių keleivių skaičių buvo galima apskaičiuoti pagal formulę $f(n) = 198 - 2n^2 + 14n$; čia n — jau pravažiuotų *tarpinių* stočių skaičius. (Jam taip pat patiko, kad formulė tiko ir tada, kol dar nebuvo pravažiuota nė viena tarpinė stotis, t. y. ir su $n = 0$.) Galinėje stotyje visi keleiviai išlipo.

a) Kiek daugiausiai galėjo būti tarpinių stočių?

b) Imdami tą didžiausią galimą tarpinių stočių skaičių raskite n reikšmę, kai keleivių traukinyje buvo daugiausia.

Galima pasiūlyti moksleiviams atsakyti į klausimus nubraižius funkcijos $f(n) = 198 - 2n^2 + 14n$ grafiką.



Mus domina taškai, kai $n = 1, 2, \ldots$. Matome, kad parabolė n ašį kerta taške, didesniame už 14, bet mažesniame už 15. Kadangi su visomis natūraliosiomis n reikšmėmis $f(n)$ reikšmės sveikos, tai n gali būti bet kuris skaičius, kol funkcija neįgyja neigiamos reikšmės. Taip pat iš grafiko nustatome, kad keleivių traukinyje skaičius buvo didžiausias, kai $n = 3$ ir $n = 4$.

Stipresnieji moksleiviai turėtų šį uždavinį spręsti (arba bent jau pamėginti) algebriškai.

a) Kadangi keleivių skaičius turi būti neneigiamas, tai sprendžiame nelygybę $198 - 2n^2 + 14n \geqslant 0$ ir gauname $n \leqslant 14$.

b) $f(n) = 198 - 2n^2 + 14n$ — kvadratinė funkcija. Jos grafikas — parabolė, kurios šakos nukreiptos žemyn. Parabolės simetrijos ašis — tiesė, einanti per parabolės viršūnės abscisę, t. y. $n = -\frac{14}{2\cdot(-2)} = 3{,}5$. Kadangi $n \in N$, tai imame dvi n reikšmes, artimiausias reikšmei $n = 3{,}5$ ir simetriškas šios reikšmės atžvilgiu. Tai $n = 3$ ir $n = 4$.

Atsakymas. a) 14; b) $n = 3$, $n = 4$.

276. a) $(-3; 4)$, $(2; -6)$; b) $(-2; -3)$, $(3; 2)$.

277. Parabolės viršūnės taško koordinatės yra: a) $(0; -2)$; b) $(3; -9)$; c) $(-3; -1)$. Funkcija didėja intervale: a) $(-\infty; 0)$; b) $(3; +\infty)$; c) $(-3; +\infty)$.

278. $2 \cdot 10\,000 \cdot (0{,}0225 + 0{,}006) = 570$ (Lt).

279. **E**.

280. Pertvarkykime duotą reiškinį: $2^{12} \cdot 5^8 = 2^8 \cdot 5^8 \cdot 2^4 = (2 \cdot 5)^8 \cdot 16 = 16 \cdot 10^8$. Taigi reiškinio reikšmė yra skaičius, turintis 10 skaitmenų.
Atsakymas. **C**.

281. a) 60 cm; b) 150 cm^2; c) 12,5 cm; d) 5 cm.

282. a) 192 cm^2, $128\sqrt{2}$ cm^3; b) 384 cm^2, 512 cm^3.

283. a) $4 \cdot 5 = 20$; b) $4 \cdot 5 \cdot 2 = 40$; c) $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 = 120$.

284. Aštuonerios vienodos staklės per 5 bendro darbo dienas pagamina 2000 detalių, todėl per 1 dieną jos pagamina $\frac{2000}{5} = 400$ (detalių). Vienerios staklės per 1 dieną pagamina $\frac{400}{8} = 50$ (detalių), tai trejos tokios pat staklės per 1 dieną pagamina $50 \cdot 3 = 150$ (detalių), o 1500 detalių jos pagamins per $1500 : 150 = 10$ (dienų).
Atsakymas. 10 dienų.
Pastaba. Sąlygoje yra korektūros klaida. Turėtų būti:
A 10 dienų **B** 9 dienas **C** 8 dienas **D** 7 dienas **E** 6 dienas

4.3. Nelygybių sprendimas intervalų metodu

Tai neprivalomas skyrelis. Intervalų metodu patogu spręsti aukštesnio negu antrojo laipsnio nelygybes ir nelygybes, kurių vardiklyje yra nežinomasis (racionaliąsias nelygybes). Tokias nelygybes bus mokoma spręsti 11 klasėje, todėl šio skyriaus galima ir nenagrinėti.

Nurodymai. 1) Šiame skyrelyje nepateikiama teorema, kuria remiasi intervalų metodas:

Teorema. *Jei funkcija $f(x)$ intervale $(a; b)$ yra tolydi ir nelygi nuliui, tai ji šiame intervale yra pastovaus ženklo (įgyja arba tik teigiamas, arba tik neigiamas reikšmes).*

(Ši teorema bus įrodyta 11 klasėje.) Todėl šį faktą reikia mokiniams paaiškinti žinomų funkcijų pavyzdžiais.

2) Šiame skyrelyje intervalų metodu sprendžiami dviejų tipų uždaviniai:

- nelygybės, kurių pavidalas yra $(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) > 0$ ($\geqslant$, $<$, $\leqslant$);
- racionaliosios nelygybės, kurių pavidalas yra $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ ($\geqslant$, $<$, $\leqslant$).

3) Sprendžiant nelygybes intervalų metodu galima laikytis tokios tvarkos:

a) nelygybei suteikiame pavidalą $f(x) > 0$ ar $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$; čia $f(x)$, $g(x)$ — daugianariai;

b) daugianarius $f(x)$, $g(x)$ išskaidome tiesiniais dauginamaisiais (ir kvadratiniais trinariais, neturinčiais šaknų);

c) randame tas x reikšmes, su kuriomis gauti tiesiniai dauginamieji lygūs 0, ir atidedame jas skaičių tiesėje;

d) kiekviename iš gautų skaičių tiesės intervalų nustatome $f(x)$ arba $\frac{f(x)}{g(x)}$ ženklus;

e) remdamiesi gautu brėžiniu ir nelygybės ženklu parašome atsakymą.

Pastaba. Jei skaidinio visi dauginamieji yra tiesiniai ir skirtingi, tai $f(x)$ arba $\frac{f(x)}{g(x)}$ ženklą pakanka nustatyti viename iš intervalų. Kituose intervaluose ženklai paeiliui keičiasi.

Pakartoti:

kaip priklauso kelių dauginamųjų sandaugos ženklas nuo dauginamųjų ženklų;
kaip priklauso trupmenos ženklas nuo skaitiklio ir vardiklio ženklų;
sąlygą, kada trupmena neturi prasmės.

Išmokti intervalų metodu spręsti nelygybes, kurių pavidalas yra $(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) < 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ ($>$, $\leqslant$, $\geqslant$).

Šiame skyrelyje:

1. Pateikiamas uždavinys, kurį sprendžiant aiškinama intervalų metodo esmė.
2. Remiantis intervalų metodu išsprendžiami 3 pavyzdžiai.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

285–294 uždaviniai yra teminiai, kiti — kartojimo. 40–51

285. a) $(-4; -1)$, $(6; +\infty)$; b) $(-\infty; -2{,}7)$, $(2{,}3; 7)$; c) $(-\infty; -8)$, $(3; 10)$; d) $(-\infty; 0)$, $(2; 4)$, $(12; +\infty)$; e) $(-1; 1)$, $(1; 3)$; f) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$, 1, $[3; +\infty)$.

286. a) $(-\infty; -3)$, $(1; +\infty)$; b) $(-7; -3)$; c) $(-\infty; 1{,}6)$, $(4; +\infty)$.
Pastaba. Gali atsirasti moksleivių, kurie tokio tipo nelygybes spręs algebriškai, t. y. pritaikę sąlygą, kada trupmena yra teigiama (neigiama). Jokiu būdu nereikalaukite, kad spręstų būtinai intervalų metodu. Galite pasiūlyti šalia algebrinio būdo išspręsti intervalų metodu.

287. a) $(-\infty; -4]$, $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$; b) $(3{,}5; 5)$; c) $\left(-\frac{1}{4}; 2\right)$.

288. a) $(-\infty; 0)$, $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$; b) $\left(0; \frac{5}{3}\right)$; c) $(0; 1)$; d) $(-\infty; 0)$, $(4; +\infty)$.
Pastaba. Spręsdami panašias nelygybes neretai moksleiviai „pameta" vieną sprendinių intervalą — jiems norisi spręsti panašiai kaip lygtį $\frac{a}{x} = b$, $x = \frac{a}{b}$. Todėl prieš sprendžiant šį uždavinį reikia gerai išnagrinėti pateiktą pavyzdį.

289. a) $(-\infty; -12]$, $(-2; 3)$; b) $(-1; 2)$, $[5; +\infty)$; c) $(-\infty; -1)$, $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, $(1; +\infty)$; d) $(-12; -2)$, $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $(3; +\infty)$.
Pastaba. Ligi šiol spręstos racionaliosios nelygybės buvo griežtos. Čia jau atsiranda ir negriežtų nelygybių. Dažniausiai moksleivių daroma klaida — skaičiaus, su kuriuo trupmenos vardiklis virsta nuliu (trupmena neturi prasmės), prijungimas prie nelygybės sprendinių. Todėl prieš sprendžiant tokio tipo nelygybes reikėtų prisiminti, kada trupmena neturi prasmės.

290. a) $(-\infty; -2)$, $(0; 4]$; b) $[-5; 0]$, $(3; +\infty)$; c) $[-3; 4]$; d) $(-3; 1)$; e) $(1; 2]$, $[3; +\infty)$; f) $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(2; 5)$.

291. Sprendžiame nelygybę:
a) $\frac{2x+1}{x-2} - \frac{x+4}{2x+5} \geqslant 0$, $x < -2{,}5$ ir $x > 2$; b) $\frac{5x-6}{7x-14} \geqslant 0$, $x \leqslant 1{,}2$ ir $x > 2$;
c) $\frac{4-x}{7-2x} \geqslant 0$, $x < 3{,}5$ ir $x \geqslant 4$; d) $\frac{x^2-4x+4}{1-x^2} \geqslant 0$, $-1 < x < 1$ ir $x = 2$.

292. a) Intervaluose $(-\infty; 3)$ ir $(5{,}5; +\infty)$ funkcijos reikšmės yra neigiamos; intervale $(3; 5{,}5)$ funkcijos reikšmės yra teigiamos;

b) intervaluose $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$ ir $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ funkcijos reikšmės yra neigiamos; intervale $\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ funkcijos reikšmės yra teigiamos;

c) intervaluose $(-\infty; -5)$, $(-2; 2)$ ir $(5; +\infty)$ funkcijos reikšmės yra neigiamos; intervaluose $(-5; -2)$ ir $(2; 5)$ funkcijos reikšmės yra teigiamos.

293. a) $(-\infty; -2)$, $(-2; 0)$, $(2; 3)$, $(8; +\infty)$; b) $(0; 2)$, $(3; 8)$;
c) -2, $[0; 2]$, $(3; 8]$; d) $(-\infty; 0]$, $[2; 3)$, $[8; +\infty)$.

294. a) $(-2; -1)$, $(-1; 0)$, $(1; 5)$; b) $(-\infty; -2)$, $(0; 1)$, $(5; +\infty)$;
c) $(-\infty; -2)$, -1, $[0; 1]$, $[5; +\infty)$; d) $(-2; 0]$, $[1; 5]$.

295. a) *Pastaba.* Sąlygoje yra korektūros klaida. Sistemos pirmoje lygtyje vietoj minuso ženklo turėtų būti pliuso ženklas.

Sprendimas. $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{25}{12}, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{25}{12}, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 12, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$

$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$. Į šią lygybę vietoj $x^2 + y^2$ įrašę 25, o vietoj xy įrašę 12 gausime, kad $(x - y)^2 = 1$. Taigi reikės išspręsti dvi lygčių sistemas: $\begin{cases} x - y = -1, \\ xy = 12 \end{cases}$ ir $\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 12. \end{cases}$

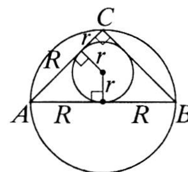
Atsakymas. a) $(-4; -3)$, $(3; 4)$, $(-3; -4)$, $(4; 3)$; b) $(-5; -3)$, $(5; 3)$.

296. *Nurodymas.* Patogu lygtį spręsti įvedant naują nežinomąjį:
a) $x^2 - 8 = t$; b) $x - \frac{1}{x} = t$.

Atsakymas. a) -3; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 3; b) $2 - \sqrt{5}$; $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $2 + \sqrt{5}$.

297. 3 cm ir 8 cm. *Nurodymas.* Taikykite susikertančių stygų atkarpų sandaugos teoremą.

298. a) $2R$. *Nurodymas.* Taikome įbrėžtinio kampo, kuris remiasi į apskritimo skersmenį, savybę.



b) Čia galima spręsti keliais būdais.
Viena vertus, kadangi $\triangle ABC$ — status lygiašonis, tai $AC = BC$. Pagal Pitagoro teoremą $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $2AC^2 = (2R)^2$, $AC = R\sqrt{2}$.
Kita vertus, galima remtis apskritimo liestinių, išeinančių iš vieno taško, atkarpų savybe: $AC = BC = r + R$.
Faktiškai įrodėme, kad sąlygoje per daug dėmenų — r ir R išreiškiami vienas kitu: $R\sqrt{2} = r + R$, taigi $r = R(\sqrt{2} - 1)$, arba $R = r(\sqrt{2} + 1)$.
Taigi sąlygos pirmą sakinį reikėtų taisyti taip:
Apie statųjį lygiašonį trikampį apibrėžto apskritimo spindulys lygus R.
Arba taip:
Į statųjį lygiašonį trikampį įbrėžto apskritimo apindulys lygus r.

299. a) -1 ir 3999; b) -1 ir 4001.

300. Sakykime, kad iki pabrangimo buvo parduota A vienetų prekių. Vadinasi, buvo gauta $25A$ Lt įplaukų. Po pabrangimo prekė kainavo $25 \cdot 1{,}12 = 28$ (Lt), o prekių parduota $\frac{80}{100}A = 0{,}8A$. Iš viso gauta įplaukų $0{,}8A \cdot 28 = 22{,}4A$ (Lt). Taigi įplaukos sumažėjo $25A - 22{,}4A = 2{,}6A$ (Lt), t. y. sumažėjo $\frac{2.6A \cdot 100}{25A} =$ $= 10{,}4$ procento.

Atsakymas. Įplaukos sumažėjo 10,4%.

301. *I būdas.* Šešiaženklį skaičių, kuris baigiasi skaitmeniu 7, pažymėkime $10a + 7$, kur a — penkiaženklis skaičius. Jei skaitmenį 7 perkeltume į skaičiaus priekį, gautume skaičių $7 \cdot 10^5 + a$. Remdamiesi uždavinio sąlyga sudarome lygtį: $7 \cdot 10^5 + a = 5(10a + 7)$, $49a = 7 \cdot (10^5 - 5)$, $7a = 99\,995$ ir $a = 14\,285$. Taigi ieškomas skaičius yra 142 857.

II būdas.

Užrašykime sąlygą taip:

$$\begin{array}{r} bcdef7 \\ \times \quad 5 \\ \hline 7bcdef \end{array}$$

Kadangi sandauga $7 \times 5 = 35$ baigiasi penketu, tai $f = 5$. Įrašę šią reikšmę į pirmą ir trečią eilutes gauname:

$$\begin{array}{r} bcde57 \\ \times \quad 5 \\ \hline 7bcde5 \end{array}$$

Kadangi 7×5 duoda tris mintyse, o 5×5 baigiasi penketu, tai $e = 8$. Įstatę gauname:

$$\begin{array}{r} bcd857 \\ \times \quad 5 \\ \hline 7bcd85 \end{array}$$

Tęsdami gauname $d = 2$, $c = 4$, $b = 1$.

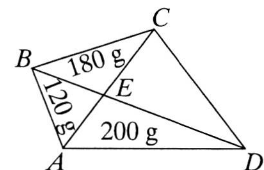
Galima remtis ir dalyba kampu. Dalydami 7 iš 5 gauname $b = 1$. Nusikeldami galime vietoj b rašyti 1. Dabar 21 dalydami iš 5 randame, kad $c = 4$ ir t. t. Žinoma, panašiai buvo galima nuosekliai rašyti ir daugybos atveju:

$$\begin{array}{r} 14285 \\ bcdef7 \\ \times \quad 5 \\ \hline 7bcdef \\ 14285 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 7bcdef & 5 \\ \cline{2-2} -5 & bcdef7 \\ \overline{21} & 142857 \\ -20 & \\ \overline{\ 14} & \\ -10 & \\ \overline{\ \ 42} & \\ -40 & \\ \overline{\ \ \ 28} & \\ -25 & \\ \overline{\ \ \ \ 35} & \\ -35 & \\ \overline{\ \ \ \ \ 0} & \end{array}$$

302. Sakykime, kad reikia realizuoti x kėdžių. Tuomet bendrosios išlaidos bus $(8100 + 100x)$ Lt. Tada:
a) įplaukos bus $120x$ Lt. Sprendžiame lygtį: $120x = 8100 + 100x$, $x = 405$;
b) $125x = 8100 + 100x$, $x = 324$; c) 225; d) 203.

303. Žinome, kad kūno masė lygi jo tūrio ir tankio sandaugai. Raskime „prizmių“ AED ir AEB masių santykį: $\frac{200}{120} = \frac{5}{3}$. Kadangi $m_{AED} = V_{AED} \cdot \rho$, $m_{AEB} = V_{AEB} \cdot \rho$, tai $\frac{m_{AED}}{m_{AEB}} = \frac{V_{AED}}{V_{AEB}} = \frac{S_{AED} \cdot H}{S_{AEB} \cdot H} = \frac{S_{AED}}{S_{AEB}} = \frac{5}{3}$. Kadangi $S_{AED} = \frac{1}{2} ED \cdot h$, $S_{AEB} = \frac{1}{2} EB \cdot h$, tai $\frac{S_{AED}}{S_{AEB}} = \frac{\frac{1}{2} ED \cdot h}{\frac{1}{2} EB \cdot h} = \frac{ED}{EB} = \frac{5}{3}$. Lygiai taip pat $\frac{S_{BCE}}{S_{ECD}} = \frac{ED}{EB} = \frac{5}{3}$, todėl „prizmių“ BEC ir ECD masių santykis taip pat yra $\frac{5}{3}$. Taigi $\frac{x}{180} = \frac{5}{3}$, ir $x = 300$.



Sprendimą galima surašyti ir be formulių. Kadangi pyrago storis vienodas, tai gabalų masės proporcingos atitinkamų trikampių plotams. Trikampių AEB ir AED aukštinė iš viršūnės A bendra, todėl plotų santykis lygus pagrindų ilgių santykiui $BE : ED$. Bet toks pat yra trikampių CEB ir CED plotų, taigi ir atitinkamų gabalų masių, santykis. Taigi $120 : 200 = 180 : x$, $x = 300$.
Atsakymas. **C.**

304. Kadangi sąlygoje pasakyta „iš muzikantų“, „iš šachmatininkų“, tai nėra jokio reikalo apriboti jų būrį — galima įsivaizduoti dabar gyvenančius viso pasaulio muzikantus ir šachmatininkus. Sakykime, kad žmonių, kurie vienu metu yra ir šachmatininkai, ir muzikantai, yra A. Pagal sąlygą muzikantų yra septynis kartus daugiau negu muzikantų, žaidžiančių šachmatais, t. y. $7A$. Šachmatininkų yra devynis kartus daugiau negu šachmatininkų, kurie muzikuoja, t. y. $9A$. Taigi šachmatininkų yra daugiau.
Sprendžiant uždavinį svarbiausia suvokti, kad mus dominančius žmones galima suskirstyti į tris atskiras grupes: muzikantai, muzikantai-šachmatininkai ir šachmatininkai. Tą patį sprendimą galima surašyti ir taip: jei tose grupėse yra M, MS ir S žmonių, tai

$$MS = (M + MS) : 7, \quad MS = (S + MS) : 9,$$

t. y. $7MS = M + MS$, $M = 6MS$ ir $9MS = S + MS$, $S = 8MS$.
Vadinasi, muzikantų yra $M + MS = 7MS$, o šachmatininkų $S + MS = 9MS$.

4.4. Netiesinių nelygybių sistemos

Nors šis skyrelis yra neprivalomas, bet jį galima nagrinėti ir su visais mokiniais. Visi mokiniai galėtų panagrinėti 1 ir 2 teorinės dalies uždavinius bei spręsti 305, 308a,d, 310, 312, 313 uždavinius.

Pakartoti:

tiesinių nelygybių su vienu kintamuoju sprendimą;
kvadratinių nelygybių sprendimą;
ką vadiname nelygybių sistemos sprendiniu;
tiesinių nelygybių su vienu kintamuoju sistemų sprendimą.

Išmokti spręsti kvadratinių nelygybių su vienu kintamuoju sistemas.

Šiame skyrelyje:

1. Siekiant pakartoti tiesinių nelygybių su vienu kintamuoju sprendimą pateikiamas klaustuku pažymėtas klausimas.

   Nurodymas. Čia mokytojui reikėtų pateikti mokiniams keletą paprastų nelygybių sistemų siekiant priminti 8 klasėje nagrinėtą tiesinių nelygybių sistemų sprendimą.
2. Pateikiamas 1 uždavinys siekiant parodyti, kaip gaunamos nelygybių sistemos, kuriose yra ne vien tiesinės nelygybės. Šiuo atveju viena nelygybė yra tiesinė, kita — kvadratinė.

   Nurodymas. Šį uždavinį pravartu nagrinėti su visais mokiniais, atkreipiant dėmesį į kvadratinės nelygybės sprendimą.
3. Pateikiamas 2 uždavinys, kai sistemą sudaro dvi kvadratinės nelygybės.

   Nurodymas. Šį uždavinį irgi galima nagrinėti su visais mokiniais.
4. Pateikiami 3 ir 4 uždaviniai, kuriuose sistemas sudaro nelygybės su moduliais ir racionaliosios nelygybės.

   Nurodymas. Šiuos uždavinius nagrinėkite tik su stipresniais mokiniais.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

305–313 uždaviniai yra teminiai, kiti — kartojimo.

34–39, 52, 53, 55, 57, 59, 60, 62

305. a) $(7; +\infty)$; b) $(-\infty; -4)$; c) $(-\infty; -5)$, $(1; 1{,}5)$; d) $[-2; 4]$.

306. a) 2, 3, 4, 5; b) 2, 3, 4.

307. a) $[-1; 3]$; b) $\left(1; \frac{5}{3}\right]$; c) $(-3; 0]$, $[4; 9)$; d) 2, $[6; 8]$.

308. *Pastaba.* f) punkte sistemos antroje nelygybėje yra korektūros klaida. Galite savo nuožiūra palikti arba minuso, arba pliuso ženklą.
Atsakymas. a) $[3; 4)$; b) $(-\infty; -2]$, $(0; 6]$; c) $(-\infty; -4]$, $(7; +\infty)$; d) 1; e) $(-\infty; -2]$, $\left[0; \frac{2}{3}\right]$; f) $[3; +\infty)$ (arba: $\left[-\frac{1}{3}; 0\right]$, $[3; +\infty)$).

309. a) $\left[-\frac{2}{3}; 3{,}5\right)$, $[4; 5)$; b) $(-\infty; -3]$, $[3; 10)$; c) $[-2; 1{,}5)$.

310. a) $[-10; -5]$, $[5; 10]$; b) $[-4; 1]$, $[2; 4]$.
Pastaba. Moksleiviams gali iškilti klausimas, kada lygtis turi prasmę. Prieš pradėdami spręsti šį uždavinį su mokiniais aptarkite, kad lygtis turi prasmę su tomis nežinomojo reikšmėmis, su kuriomis turi prasmę visi į lygtį įeinantys reiškiniai.

311. a) Lygtis $x^2 - (2a-1)x + 1 - a = 0$ turi du skirtingus sprendinius x_1 ir x_2, kai jos diskriminantas yra teigiamas. Kadangi $D = 4a^2 - 3$, tai turi būti teisinga nelygybė $4a^2 - 3 > 0$. Remiantis Vijeto teorema $x_1 + x_2 = 2a - 1$ ir $x_1 \cdot x_2 = 1 - a$. Kad būtų $x_1 > 0$ ir $x_2 > 0$, turi būti $2a - 1 > 0$ ir $1 - a > 0$. Bet ir atvirkščiai — jei $1 - a > 0$, tai šaknys bus vieno ženklo, o kadangi $2a - 1 > 0$, tai jos abi bus teigiamos. Turime nelygybių sistemą:
$$\begin{cases} 4a^2 - 3 > 0, \\ 2a - 1 > 0, \\ 1 - a > 0. \end{cases}$$
Išsprendę ją gauname, kad $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$.

b) Lygtis $x^2 - (2m-6)x + 3m + 9 = 0$ turi du skirtingus sprendinius x_1 ir x_2, kai $D > 0$. Kadangi $D = 4m^2 - 36m$, tai turi būti teisinga nelygybė $4m^2 - 36m > 0$. Kadangi sprendiniai turi būti skirtingų ženklų, tai turi būti $x_1 \cdot x_2 = 3m + 9 < 0$. Bet ir atvirkščiai — jeigu bus $3m + 9 < 0$, tai šaknų sandauga bus neigiama, taigi šaknys turės skirtingus ženklus.
Turime nelygybių sistemą: $\begin{cases} 4m^2 - 36m > 0, \\ 3m + 9 < 0. \end{cases}$
Išsprendę ją gauname, kad $m < -3$.

c) Lygtis $x^2 - (2k+4)x - 5 - 2k = 0$ turi du skirtingus sprendinius x_1 ir x_2, kai $D > 0$. Kadangi $D = 4k^2 + 24k + 36$, tai turi būti teisinga nelygybė $4k^2 + 24k + 36 > 0$. Remiantis Vijeto teorema $x_1 + x_2 = 2k + 4$, $x_1 \cdot x_2 = -5 - 2k$. Kad būtų $x_1 < 0$ ir $x_2 < 0$, turi būti $2k+4 < 0$ ir $-5-2k > 0$. Bet ir atvirkščiai — jeigu $2k + 4 < 0$ ir $-5 - 2k > 0$, tai šaknys bus neigiamos: jų sandauga teigiama, todėl jos vieno ženklo, o jų suma neigiama, taigi jos neigiamos. Turime nelygybių sistemą: $\begin{cases} 4k^2 + 24k + 36 > 0, \\ 2k + 4 < 0, \\ -5 - 2k > 0. \end{cases}$

Išsprendę ją gauname, kad $k < -3$ ir $-3 < k < -2{,}5$.

Atsakymas. a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$; b) $(-\infty; -3)$; c) $(-\infty; -3)$, $(-3; -2{,}5)$.

312. $(2; 3)$.

313. a) -3; b) 3.

314. a) $(-3; 4)$, $(3; 4)$, $(-4; -3)$, $(4; -3)$; b) $(-5; 0)$, $(4; -3)$, $(4; 3)$.
Nurodymas. Sistemą patogu spręsti iš bet kurios lygties išreiškus:
a) x^2; b) y^2.

315. *Nurodymas.* Lygtį spręskite įvesdami naują nežinomąjį: a) $\sqrt{x-7} = t$; b) $\sqrt{x-1} = t$.
Atsakymas. a) 16; b) 10.

316. a) Funkcijos $f(x) = 3 + \frac{4}{x-1}$ grafikas yra hiperbolė $y = \frac{4}{x}$, pastumta per 1 vienetą į dešinę ir per 3 vienetus aukštyn;
b) funkcijos $f(x) = \frac{2}{x+1} - 3$ grafikas yra hiperbolė $y = \frac{2}{x}$, pastumta per 1 vienetą į kairę ir per 3 vienetus žemyn.

317. Sakykime, kad rutulio spindulys yra R, tada jo tūris $\frac{4}{3}\pi R^3$. Kubo įstrižainė lygi $2R$, todėl jo kraštinę x randame iš lygties $x^2 + x^2 + x^2 = 4R^2$, $x = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.
Kubo tūris lygus $\frac{8R^3}{3\sqrt{3}}$. Raskime kubo masę m. Kadangi masės proporcingos tūriams, tai $m : p = \frac{8R^3}{3\sqrt{3}} : \frac{4}{3}\pi R^3$, $m = \frac{2p\sqrt{3}}{\pi}$.
Plieno atliekų masę rasime iš rutulio masės atėmę kubo masę, t. y.
$p - \frac{2p\sqrt{3}}{\pi} = p\left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3\pi}\right)$.
Atsakymas. $p\left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3\pi}\right)$.

318. *I būdas.* Lygties sprendinius randame remdamiesi kvadratinės lygties sprendinių formule.
II būdas. Lygties sprendinius randame remdamiesi teorema, atvirkštine Vijeto teoremai.
Atsakymas. a) -2000 ir 1; b) -1 ir 2002.

319. Kadangi dviejų trikampio kraštinių ilgių suma turi būti didesnė už trečiosios kraštinės ilgį, tai turi būti teisinga nelygybių sistema: $\begin{cases} 2 + 7 > c, & (1) \\ 2 + c > 7, & (2) \\ 7 + c > 2. & (3) \end{cases}$
Akivaizdu, kad (3) nelygybė yra visada teisinga. Iš (1) nelygybės gauname, kad $c < 9$, o iš (2) — kad $c > 5$.
Atsakymas. Ilgesnė už 5 cm, bet trumpesnė už 9 cm.

320. Sakykime, kad anksčiau buvo parduota A vienetų prekių. Vadinasi, buvo gauta $20A$ Lt įplaukų. Pardavus atpigintas prekes buvo gauta $20A \cdot 1{,}1 = 22A$ (Lt) įplaukų, o parduota $\frac{22A}{16} = \frac{11A}{8}$ vienetų prekių. Taigi atpiginus prekes parduota $\frac{11A}{8} - A = \frac{3}{8}A$ prekių daugiau. Vadinasi, prekių paklausa padidėjo
$\frac{\frac{3}{8}A \cdot 100}{A} = 37{,}5$ (%).
Atsakymas. Prekių paklausa padidėjo 37,5%.

321. C.

322. Sakykime, kad per 1 dieną 1 juodmargė karvė duoda $x\,\ell$ pieno, o 1 žala karvė $y\,\ell$ pieno. Tada per 5 dienas 4 juodmargės duoda $20x\,\ell$ pieno, o 3 žalos — $15y\,\ell$ pieno; per 4 dienas 3 juodmargės duoda $12x\,\ell$ pieno, o 5 žalos — $20y\,\ell$ pieno. Pagal sąlygą: $20x + 15y = 12x + 20y$, $8x = 5y$. Vadinasi, per 1 dieną 8 juodmargės karvės duoda tiek pieno, kiek per 1 dieną duoda 5 žalos karvės. Taigi žalos karvės yra produktyvesnės.

323. a) 2; b) $2\sqrt{3} - 3$.

5. KOMBINATORIKA IR TIKIMYBĖS

Programoje, pagal kurią buvo rašomas vadovėlis, nurodyta, kad 10 klasėje reikia nagrinėti:
1) kombinatorikos elementus (daugybos taisyklę; kėlinius, gretinius, derinius; Paskalio taisyklę);
2) nepriklausomus bandymus;
3) matematinę viltį.

Pasitarus su programos autoriais daugybos taisyklė buvo perkelta į 9 klasės, Paskalio taisyklė — į vidurinės mokyklos kursą. Šiame vadovėlio skyriuje programoje surašyta eilės tvarka ir nagrinėjami minėti klausimai. Pirmajame skyrelyje „Rinkiniai“ mokoma spręsti kėlinių, gretinių ir derinių uždavinius. Antrajame skyrelyje „Nepriklausomi įvykiai“ mokoma apskaičiuoti tikimybę įvykio, sudaryto iš dviejų ar daugiau nepriklausomų įvykių. Trečiasis ir ketvirtasis skyreliai skirti matematinės vilties sąvokai aiškinti.

Nurodymai. 1) Svarbiausia šiame skyriuje išmokyti spręsti uždavinius, susijusius su rinkinių skaičiaus radimu, t. y. kėlinių, gretinių ir derinių skaičiaus radimu *nesiremiant formulėmis*. Todėl tik ši medžiaga vadovėlyje pateikta kaip privaloma. Visi kiti klausimai aiškinami pilkajame fone — kaip neprivaloma medžiaga.

2) Kombinatorikos, tikimybių ir statistikos klausimai yra palyginti nauji pagrindinėje mokykloje. Todėl programa dar nenusistovėjusi ir gali būti rečiau ar dažniau keičiama. Mokytojams, planuojant darbą, reikėtų atsižvelgti ne tik kaip vadovėlyje ši medžiaga skirstoma į privalomą ir neprivalomą, bet ir pažiūrėti, kokie reikalavimai moksleivių žinioms keliami standartuose, egzaminų programoje, ministerijos leidžiamose programose.

Minimalus lygmuo:

1. Gebėti spręsti uždavinius, susijusius su kėlinių, gretinių ir derinių skaičiaus radimu nesiremiant formulėmis, o tiesiog surašant visus rinkinius.

Pagrindinis lygmuo:

2. Gebėti spręsti uždavinius, susijusius su kėlinių, gretinių ir derinių skaičiaus radimu remiantis daugybos taisykle.
3. Pateikti pavyzdžių uždavinių, kuriuose elementų išdėstymo tvarka rinkinyje yra svarbi ir kuriuose — nėra svarbi.

Aukštesnis lygmuo:

4. Žinoti, kokie rinkiniai vadinami kėliniais, kokie — gretiniais, kokie — deriniais.
5. Žinoti kėlinių, gretinių ir derinių skaičiaus formules.
6. Žinoti skaičiaus faktorialą.
7. Suprasti sąvoką nepriklausomi įvykiai (nepriklausomi bandymai).
8. Gebėti spręsti dviejų nepriklausomų įvykių tikimybės radimo uždavinius.
9. Suprasti atsitiktinio dydžio sąvoką, žinoti, kaip sudaroma atsitiktinio dydžio skirstinio lentelė.
10. Suprasti, ką vadiname atsitiktinio dydžio matematine viltimi.
11. Žinoti, kaip apskaičiuojama atsitiktinio dydžio matematinė viltis, ir gebėti ją apskaičiuoti.

5.1. Rinkiniai

Tai pats svarbiausias šio skyriaus skyrelis. Sprendžiant uždavinius dažnai tenka skaičiuoti, kiek yra rinkinių. Rinkinių skaičių galima nustatyti:

- surašant tuos rinkinius;
- braižant galimybių medį;
- remiantis daugybos taisykle;
- remiantis kėlinių, gretinių, derinių skaičiaus formulėmis.

Pagrindinėje mokykloje siekiama išmokyti mokinius nustatyti rinkinių skaičių nesiremiant formulėmis (kombinatorika be formulių). Svarbiausia, kad mokiniai gautų atsakymą samprotaudami, o ne mechaniškai taikydami formules. Todėl šiame skyrelyje pirmiausia mokoma nustatyti rinkinių skaičių be formulių (1–3 uždaviniai), o po to parodoma, kaip tuos pačius uždavinius galima spręsti taikant formules.

Nurodymai. 1) Sprendžiant kombinatorikos uždavinius dažnai praverčia daugybos taisyklė — jos buvo mokoma 9 klasėje (Matematika 9, II dalis, 8 skyrius, 4 skyrelis). Aišku, ne visuose uždaviniuose pakanka daugybos taisyklės. Pavyzdžiui, ieškant kėlinių ar gretinių skaičiaus jos pakanka, o skaičiuojant derinius dar reikia ir dalyti.
2) Kėliniai yra atskiras gretinių atvejis, t. y. $P_n = A_n^n$. Todėl svarbiausia šiame skyrelyje, kad mokiniai gebėtų nustatyti, ar dominančiuose rinkiniuose yra svarbi elementų išdėstymo tvarka, ar ta tvarka nesvarbi, t. y., pavyzdžiui, ar rinkiniai AB ir BA reiškia tą patį rinkinį, ar skirtingus rinkinius.

Pakartoti daugybos taisyklę.

Išmokti spręsti su rinkinių skaičiaus radimu susijusius uždavinius.

Šiame skyrelyje:

1. Pateikiamas mokiniams 9 klasėje spręstas uždavinys: *Kiek yra triženklių skaičių, sudarytų iš skaitmenų 7, 8, 9, jei skaičiuje skaitmenys kartotis negali?*
   Šiuo uždaviniu siekiama:
   1) pakartoti, kaip galima spręsti tokius uždavinius — surašant visus variantus arba remiantis daugybos taisykle;
   2) pateikti kėlinius atitinkantį pavyzdį.

   Pastaba. Čia svarbiausia, kad mokiniai pakartotų ir gerai įsisavintų daugybos taisyklę.

2. Pateikiamas antras uždavinys, kuriame reikia rasti rinkinių skaičių, kai rinkiniai vienas nuo kito skiriasi arba bent vienu elementu, arba elementų išdėstymo tvarka:
   Keliais skirtingais būdais iš 4 mokinių galima išrinkti ***seniūną*** *ir* ***pavaduotoją****?*
   Šiuo uždaviniu siekiama:
   1) parodyti, kad tokį uždavinį galima spręsti surašant visus rinkinius, — tai patogu padaryti sudarant lentelę;
   2) parodyti, kad čia vėl pakanka taikyti daugybos taisyklę;
   3) pateikti gretinius atitinkantį pavyzdį.

   Pastaba. Svarbu, kad mokiniai suprastų, jog šiame uždavinyje yra svarbi elementų tvarka rinkinyje.

3. Pateikiamas trečias uždavinys, kuriame reikia rasti rinkinių skaičių, kai rinkiniai vienas nuo kito skiriasi bent vienu elementu (elementų tvarka rinkinyje):
   Keliais skirtingais būdais iš 4 mokinių galima išrinkti ***du atstovus*** *į mokyklos tarybą?*
   Šiuo uždaviniu siekiama:
   1) parodyti, kad tokį uždavinį patogu spręsti surašant visus rinkinius;
   2) parodyti, ką šis uždavinys turi bendro su prieš tai buvusiu uždaviniu ir kuo nuo jo skiriasi;
   3) atkreipti dėmesį, kad sprendžiant šį uždavinį nepakanka taikyti daugybos taisyklę — tenka ir dalyti;
   4) pateikti derinius atitinkantį pavyzdį.

   Nurodymai. 1) Svarbu, kad mokiniai suprastų, jog, skirtingai nei 2 uždavinyje, čia elementų tvarka rinkiniuose nėra svarbi, t. y. rinkiniai, pavyzdžiui, AB ir BA reiškia tą patį rinkinį.
   2) Mokiniai dažnai klysta spręsdami panašius uždavinius, kai rinkinį sudaro ne 2, bet daugiau elementų. Suradę, kiek yra rinkinių, kuriuose elementų tvarka yra svarbi (gretinių skaičių), mokiniai automatiškai tą skaičių dalija iš dviejų (kaip ir dviejų elementų atveju). Čia mokiniai turi suvokti, kad jei rinkinį sudaro:
   - 2 elementai, tai dalijama iš 2, nes iš 2 elementų galima sudaryti 2 rinkinius, kurie nesiskiria elementais, o skiriasi eilės tvarka (pvz., AB ir BA);
   - 3 elementai, tai dalijama iš 6, nes iš 3 elementų galima sudaryti 6 rinkinius ($3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$), kurie skiriasi tik elementų išdėstymo tvarka (žr. 1 uždavinį);

     ....
   - n elementų, tai dalijama iš $n!$.

   Silpnesniems mokiniams pakaktų spręsti tokius uždavinius, kur rinkiniai sudaromi ne daugiau kaip iš 3 elementų. Praktiškai sprendžiant šį uždavinį tenka išspręsti 2 uždavinį, po to — 1 uždavinį ir 2 uždavinio rezultatą padalyti iš 1 uždavinio rezultato.

4. Pilkajame fone kaip neprivaloma medžiaga anksčiau spręsti uždaviniai išsprendžiami dar kartą įvedant sąvokas: kėliniai, gretiniai, deriniai, ir išvedant jų skaičiaus radimo formules:

   $$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1,$$
   $$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1),$$
   $$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k(k-1)(k-2) \cdot \ldots \cdot 1}.$$

   Nurodymas. Atkreipkite mokinių dėmesį, kad $A_n^n = P_n$ ir $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$.

324–349 uždaviniai yra teminiai, o kiti — kartojimo. 1–40
Nurodymai. 1) Visus skyrelyje pateiktus uždavinius galima išspręsti nesiremiant gretinių ir derinių skaičiaus formulėmis. Jei mokytojas visą teorinę medžiagą (ir pilkuosius puslapius) pateiks kaip privalomą mokėti visiems, tai uždavinius galima spręsti taikant kėlinių, gretinių ir derinių skaičiaus formules. Tačiau nepatartume piktnaudžiauti tomis formulėmis, nes dažnai nutinka taip, kad net nesuvokiant uždavinio sąlygos mechaniškai yra įrašomi skaičiai į vieną ar kitą formulę ir tokiu būdu gaunamas atsakymas.
2) Pravartu naudotis skaičiuokliu.

324. *Pastaba.* Tai vienintelis uždavinys, kur prašoma *surašyti* visas galimybes. Žinoma, silpnesnieji moksleiviai gali spręsti ir kitus uždavinius surašydami visas galimybes. Tačiau tai užima nemažai laiko.
Pažymėkime ledus atitinkama raide: A — abrikosiniai, B — braškiniai, K — karameliniai, R — riešutiniai.
a) AB, AK, AR, BK, BR, KR; 6 galimybės;
b) ABK, ABR, AKR, BKR; 4 galimybės.

325. a) $\frac{5\cdot4}{2\cdot1} = 10$; b) $\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1} = 10$; c) $\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 5$.
Nurodymai. 1) Kaip minėjome, galima spręsti ir surašant visas galimybes, pvz.:
a) bandelių rūšis pažymėkime raidėmis a, b, c, d, e. Šiuo atveju tvarka, kuria išvardysime dvi skirtingų rūšių bandeles, yra nesvarbi. Pavyzdžiui, rinkinys ab, kaip ir rinkinys ba, reiškia, kad pasirinkome dvi tas pačias bandeles — a ir b. Kokia tvarka jas išvardysime, visai nesvarbu. Surašykime visas galimas pasirinkimo baigtis: ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de. Iš viso gavome dešimt skirtingų rinkinių.
2) Galima taikyti ir derinių skaičiaus formulę, t. y.: a) $C_5^2 = \frac{5\cdot4}{2\cdot1} = 10$.

326. a) $\frac{6\cdot5}{2\cdot1} = 15$. Jeigu išrašinėsime visas pasirinkimo galimybes (derinius), patogu rašyti juos trikampiu:

$$\begin{array}{ccccc} ab & ac & ad & ae & af \\ & bc & bd & be & bf \\ & & cd & ce & cf \\ & & & de & df \\ & & & & ef \end{array}$$

Lentelėje yra $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ derinių.
b) $\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20$. Ir čia nesunku surašyti visus derinius trikampiais:

$$\begin{array}{lllll} abc & abd & abe & abf & \left.\right\} 10 \\ & acd & ace & acf & \\ & & ade & adf & \\ & & & aef & \\ & bcd & bce & bcf & \left.\right\} 6 \\ & & bde & bdf & \\ & & & bef & \\ & & cde & cdf & \left.\right\} 3 \\ & & & cef & \\ & & & def & \left.\right\} 1 \end{array}$$

c) $\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 15$. Šiuo atveju irgi nesunku surašyti derinius trikampiais:

$$\begin{array}{lll} abcd & abce & abcf \\ & acde & acdf \\ & & acef \\ & bcde & bcdf \\ & & bcef \\ & & cdef \end{array}$$

Galima mokiniams pasakyti, kad pasirinkti 4 pieštukus galimybių yra tiek pat, kiek ir atmesti 2 pieštukus, t. y. $C_6^4 = C_6^2 = 15$.

327. a) Pirmąją vietą gali užimti bet kuris iš 7 mokinių, antrąją — bet kuris iš 6 likusių, o trečiąją — bet kuris iš 5 likusių. Taigi trys prizinės vietos gali būti paskirstytos $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ skirtingų būdų.

b) Kadangi šiuo atveju pasirinkimo tvarka yra nesvarbi, tai tris moksleivius iš septynių galima išsirinkti $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ skirtingais būdais. Juos išrašyti trikampiais taip pat nėra sunku:

abc	*abd*	*abe*	*abf*	*abg*	
	acd	*ace*	*acf*	*acg*	
		ade	*adf*	*adg*	} 15
			aef	*aeg*	
				afg	
	bcd	*bce*	*bcf*	*bcg*	
		bde	*bdf*	*bdg*	} 10
			bef	*beg*	
				bfg	
		cde	*cdf*	*cdg*	
			cef	*ceg*	} 6
				cfg	
			def	*deg*	} 3
				dfg	
				efg	} 1

Žinoma, uždavinius galima spręsti kita tvarka: išrinkti 3 mokinius galima 35 būdais, 3 mokiniams paskirstyti 3 vietas galima 6 būdais, taigi abu darbus galima nuveikti $35 \cdot 6 = 210$ būdų.

328. Romas turi $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$, o Lina — $\frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$ skirtingas pasirinkimo galimybes.

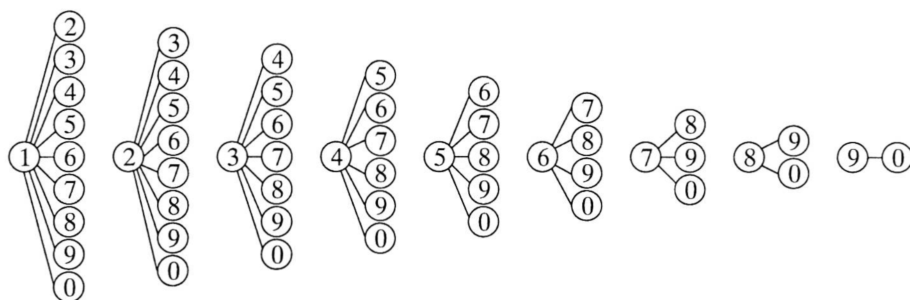
329. a) Spręsti uždavinį galima įvairiai. Patogumo dėlei sunumeruokime žurnalistus: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

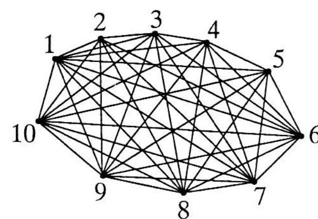
I būdas. Kadangi kiekvienas iš 10 žurnalistų pasisveikino su kiekvienu iš likusių 9 paspausdami vienas kitam rankas, o pasisveikinimai, pavyzdžiui, (12) ir (21) yra vienas ir tas pats pasisveikinimas, tai iš viso buvo $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ rankų paspaudimai.

II būdas. Pirmasis žurnalistas pasisveikino su likusiais 9 žurnalistais — 9 rankų paspaudimai (12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 10); antrasis žurnalistas pasisveikino su likusiais 8 žurnalistais — 8 rankų paspaudimai (kadangi pirmasis pasisveikino su antruoju, tai laikome ir antrąjį pasisveikinusiu su pirmuoju. Taigi buvo šie rankų paspaudimai: 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 20); trečiasis žurnalistas pasisveikino su likusiais 7 žurnalistais — 7 rankų paspaudimai (34, 35, 36, 37, 38, 39, 30), ir t. t.; aštuntasis pasisveikino su devintuoju ir dešimtuoju (89, 80); devintasis pasisveikino su dešimtuoju (90). Taigi rankų paspaudimų buvo: $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$.

Pastaba. Tai nesunkiai galima pademonstruoti klasėje. Pakvieskite dešimt vaikų ir suskaičiuokite rankų paspaudimus.

III būdas. Tai būdas, analogiškas antrajam, tik pavaizduotas schema.





IV būdas. Kiekvieną iš žurnalistų pažymėkime tašku su atitinkamu numeriu, kaip iškilojo dešimtkampio viršūnes, ir nubraižykime tą dešimtkampį. Iškilasis n-kampis turi $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{(n-3)\cdot n}{2}$ įstrižainių (žr. „Matematika 7, mokytojo knyga", 51 uždavinys, 73 p.). Taigi nubraižytas dešimtkampis turės $\frac{(10-3)\cdot 10}{2} = 35$ įstrižaines. Pridėję dešimtkampio kraštinių skaičių gausime 45 skirtingas linijas.

V būdas. Du iš dešimties taškų tarpusavyje galima sujungti C_{10}^2 būdų, t. y. $C_{10}^2 = \frac{10\cdot 9}{2\cdot 1} = 45$.

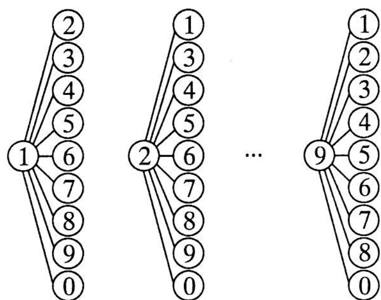
Pastaba. Visai nesvarbu, kuriuo iš būdų mokiniai suskaičiuos rankų paspaudimus. Kur kas svarbiau, kad jie suvoktų, ką daro, ir sugebėtų paaiškinti sprendimą.

b) *I būdas.* Kiekvienas iš žurnalistų pasikeitė vizitinėmis kortelėmis su kiekvienu iš likusių 9. Taigi buvo išdalyta $10 \cdot 9 = 90$ vizitinių kortelių.

Pastaba. Atkreipkite dėmesį, kad šiuo atveju rinkiniai, pavyzdžiui, (12) ir (21) yra skirtingi.

II būdas. Kai žurnalistai sveikinosi paspausdami vienas kitam rankas (a) punktas), tai gavome 45 rankų paspaudimus — kiekvienai žurnalistų porai tenka po vieną rankų paspaudimą. Šiuo atveju (b) dviem žurnalistams keičiantis vizitinėmis kortelėmis panaudojamos dvi kortelės. Vadinasi, buvo išdalyta $45 \cdot 2 = 90$ vizitinių kortelių.

III būdas. Galima pavaizduoti schema.



IV būdas. Iš kiekvienos n-kampio viršūnės galima nubrėžti $(n-3)$ įstrižaines; iš n viršūnių nubrėžtume $(n-3)\cdot n$ įstrižainių, iš 10 viršūnių nubrėžtume $(10-3)\cdot 10 = 70$ įstrižainių. Iš vienos n-kampio viršūnės galima nubrėžti 2 kraštines; iš n viršūnių nubrėžtume $2n$ kraštinių, iš 10 viršūnių nubrėžtume $2 \cdot 10 = 20$ kraštinių. Turėsime $70 + 20 = 90$ linijų (žr. a) punkto IV būdo brėžinį. Šiuo atveju linija, pvz., 13, laikoma dviem linijomis: 13 ir 31).

V būdas. Sakykime, kad žurnalistų poroje pirmas parašytas duoda vizitinę kortelę antram. Vadinasi, vizitinių kortelių išdalijama tiek, kiek galima sudaryti žurnalistų porų (vieta svarbu), t. y. $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$.

330. Tai uždavinys, analogiškas 329a) uždaviniui.
Atsakymas. Buvo sužaista 91 partija.

331. $\frac{15\cdot 14\cdot 13}{3\cdot 2\cdot 1} = 455$.

332. a) Ištraukti vieną rutulį yra 10 skirtingų galimybių ($C_{10}^1 = 10$);
b) $\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1} = 45$ (sprendimas analogiškas 329a) uždavinio sprendimui);
c) $\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120$ ($C_{10}^3 = 120$);
d) $\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 210$ ($C_{10}^4 = 210$).

333. a) Pirmąja knyga gali būti bet kuri iš 12 knygų, antrąja — bet kuri iš likusių 11, trečiąja — bet kuri iš likusių 10, ketvirtąja — bet kuri iš likusių 9 knygų. Kadangi pasirinkimo tvarka nesvarbi, o kiekvieną knygų ketvertą galima sutvarkyti $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ skirtingais būdais, tai 4 knygas iš 12 galima išsirinkti $\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 495$ skirtingais būdais ($C_{12}^4 = 495$).
b) Kadangi šiuo atveju tvarka jau yra svarbi, tai iš 12 knygų pasirinkti 4 ir jas sunumeruoti galima $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11\,880$ skirtingų būdų ($A_{12}^4 = 11\,880$).

334. a) Pirmas žmogus gali atsisėsti bet kurioje iš 5 sunumeruotų kėdžių, o antras — bet kurioje iš likusių 4. Taigi du žmonės 5 sunumeruotų kėdžių eilėje gali susėsti $5 \cdot 4 = 20$ skirtingų būdų ($A_5^2 = 20$);
b) $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ ($A_5^3 = 60$);
c) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ ($A_5^4 = 120$);
d) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ ($A_5^5 = 120$).

335. Sprendimas būtų analogiškas 329a) uždavinio sprendimui. Kadangi tiesę vienareikšmiškai nusako bet kurie du plokštumos taškai, tai per 6 plokštumos taškus, iš kurių jokie 3 nėra vienoje tiesėje, galima nubrėžti $\frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$ tiesių.
Pastaba. Silpnesnieji moksleiviai galėtų spręsti šį uždavinį pažymėdami sąsiuvinyje 6 taškus ir per kiekvienus du taškus nubrėžę tieses suskaičiuoti, kiek jų yra (329a, IV būdas). Kad trys taškai neatsidurtų vienoje tiesėje, labai gerai imti apskritimo taškus.

336. a) Patogu pasinaudoti 335 uždavinio sprendimu. Kadangi bet kuriuos 2 iš 6 taškų tarpusavyje galima sujungti 15 būdų, tai iš šio skaičiaus atėmę šešiakampio kraštinių skaičių (6) gausime įstrižainių skaičių: $\frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} - 6 = 9$ $(C_6^2 - 6 = 9)$.
Pastaba. Silpnesnieji moksleiviai galėtų naudotis 335 uždavinio brėžiniu ir suskaičiuoti įstrižaines.
b) $\frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} - 12 = 54$.

337. Sąlygos teiginys „pažymėti 8 skirtingi apskritimo taškai“ analogiškas teiginiui „plokštumoje pažymėti 8 taškai ir jokie 3 iš jų nėra vienoje tiesėje“.
a) $\frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$ $(C_8^2 = 28)$; b) $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ $(C_8^3 = 56)$; c) $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$ $(C_8^4 = 70)$.

338. Tai atvirkštinis uždavinys 329 uždaviniui. Jei gerai išnagrinėjote pastarąjį, tai didesnių sunkumų kilti neturėtų. Sakykime, kad gimtadienyje dalyvavo n svečių. Kiekvienas iš n svečių pasisveikino su kiekvienu iš likusių $(n-1)$ paspausdami vienas kitam rankas, o kiekvieną dvejetą galima sutvarkyti $2 \cdot 1$ skirtingais būdais. Remdamiesi tuo sprendžiame lygtį: $\frac{n(n-1)}{2} = 28$, $n_1 = -7$ (netinka), $n_2 = 8$. Taigi gimtadienyje dalyvavo 8 svečiai.

339. $\frac{n(n-1)}{2} = 36$, $n = 9$.

340. *Nurodymai.* 1) Šiuo numeriu prasideda uždaviniai su tikimybe. Reikėtų pakartoti klasikinį tikimybės apibrėžimą, prisiminti tikimybės skaičiavimo algoritmą.
2) Sprendžiant tokius uždavinius reikia suformuluoti įvykį. Patogu jį pažymėti didžiąja raide.
3) Išnagrinėję ir išsprendę keletą tokių uždavinių mokiniai turėtų pamatyti, kaip kombinatorika „tarnauja“ skaičiuojant įvykių tikimybes.
4) Nors faktorialo sąvoka vadovėlyje pateikiama pilkajame fone, galima jo apibrėžimą suformuluoti visiems.
Sprendimas.
a) Pirmąja raide gali būti bet kuri iš duotųjų 5, antrąja — bet kuri iš likusių 4, trečiąja — bet kuri iš likusių 3, ketvirtąja — bet kuri iš likusių 2, penktąja — ta, kuri liko paskutinė. Taigi iš 5 raidžių galima sudaryti $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ skirtingų penkių raidžių rinkinių $(5! = 120)$.
b) Kadangi pirmoji raidė K, tai reikia suskaičiuoti, kiek skirtingų *keturių* raidžių rinkinių galima sudaryti iš raidžių N, Y, A, G: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ $(4! = 24)$.
c) Kadangi pirmoji raidė K, o paskutinė A, tai reikia suskaičiuoti, kiek skirtingų *trijų* raidžių rinkinių galima sudaryti iš raidžių N, Y, G: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ $(3! = 6)$.
d) Pažymėkime raide A įvykį, kad atsitiktinai sudarytas raidžių penketas susidės į žodį KNYGA. Kadangi iš penkių skirtingų raidžių galima sudaryti 120 skirtingų penkių raidžių rinkinių (punktas a)), tarp kurių bus vienas žodis KNYGA, tai $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{120}$.
e) Pažymėkime raide B įvykį, kad atsitiktinai sudarytas raidžių penketas prasidės raide K. Kadangi iš penkių skirtingų raidžių galima sudaryti 120 skirtingų penkių raidžių rinkinių (punktas a)), tarp kurių bus 24 rinkiniai, kurių pirmoji raidė K (punktas b)), tai $\mathbf{P}(B) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$.
f) C — atsitiktinai sudarytas raidžių penketas prasidės raide K, o pasibaigs raide A; $\mathbf{P}(C) = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$ (remiamės punktų a) ir c) rezultatais).
Atsakymas. a) 120; b) 24; c) 6; d) $\frac{1}{120}$; e) $\frac{1}{5}$; f) $\frac{1}{20}$.

341. Delegacija renkama iš $6 + 8 = 14$ mokinių.
a) $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 364$ $(C_{14}^3 = 364)$.
b) $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ $(C_6^3 = 20)$.
c) Iš 6 berniukų išrinkti 2 yra $\frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$ skirtingų būdų $(C_6^2 = 15)$. Iš 8 mergaičių išrinkti 1 yra 8 skirtingi būdai $(C_8^1 = 8)$. Vadinasi, iš 14 mokinių išrinkti 3 mokinių delegaciją, į kurią įeitų 2 berniukai ir viena mergaitė, galima $15 \cdot 8 = 120$ skirtingų būdų $(C_6^2 \cdot C_8^1 = 120)$.
d) Sprendimas analogiškas c) punkto sprendimui, t. y. $\frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \cdot 6 = 168$ $(C_8^2 \cdot C_6^1 = 168)$.

342. *Nurodymas.* Sprendžiant a), c) ir d) punktus patogu remtis 341 uždavinio atsakymu.

a) A — 3 mokinių delegacijoje bus tik berniukai; $\mathbf{P}(A) = \frac{20}{364} = \frac{5}{91}$ (iš 18 mokinių išrinkti 3 mokinių delegaciją galima 364 skirtingais būdais, o išrinkti 3 mokinių delegaciją, kurioje būtų tik berniukai, galima 20 skirtingų būdų, t. y. $\frac{C_6^3}{C_{14}^3} = \frac{5}{19}$).

b) Pirmiausia reikia apskaičiuoti, kiek yra skirtingų galimybių iš 6 berniukų ir 8 mergaičių išrinkti 3 mokinių delegaciją, kurioje būtų tik mergaitės: $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$.

B — 3 mokinių delegacijoje bus tik mergaitės; $\mathbf{P}(B) = \frac{56}{364} = \frac{2}{13}$ $(\frac{C_8^3}{C_{14}^3} = \frac{2}{13})$.

c) C — 3 mokinių delegacijoje bus 2 berniukai ir 1 mergaitė; $\mathbf{P}(C) = \frac{120}{364} = \frac{30}{91}$ $(\frac{C_6^2 \cdot C_8^1}{C_{14}^3} = \frac{30}{91})$.

d) D — 3 mokinių delegacijoje bus 2 mergaitės ir 1 berniukas; $\mathbf{P}(D) = \frac{168}{364} = \frac{6}{13}$ $(\frac{C_8^2 \cdot C_6^1}{C_{14}^3} = \frac{6}{13})$.

343. Iš dėžės, kurioje yra 12 rutulių $(8 + 4 = 12)$, išimti du galima $\frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66$ skirtingais būdais, t. y. $n = 66$.

a) A — abu išimti rutuliai yra balti; $m = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$, $\mathbf{P}(A) = \frac{28}{66} = \frac{14}{33}$;

b) B — abu išimti rutuliai yra juodi; $m = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$, $\mathbf{P}(B) = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$;

c) C — vienas rutulys yra juodas, o kitas baltas; $m = 4 \cdot 8 = 32$, $\mathbf{P}(C) = \frac{32}{66} = \frac{16}{33}$.

344. a) $6 \cdot 6 = 36$;

b) $6 \cdot 3 = 18$ (vienetų skaitmuo yra 2, 4 arba 6);

c) $6 \cdot 1 = 6$ (vienetų skaitmuo yra 5);

d) $\mathbf{P}$(sudarytas skaičius yra lyginis) $= \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$;

e) $\mathbf{P}$(sudarytas skaičius yra 5 kartotinis) $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Pastaba. Silpnesniesiems mokiniams galima pasiūlyti susidaryti lentelę.

345. Sprendimas analogiškas 341 ir 342 uždavinių sprendimui. Visų elementariųjų įvykių skaičius $n = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3003$.

a) A — visi parinkti 5 žmonės yra kairiarankiai; $m = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6$, $\mathbf{P}(A) = \frac{6}{3003} = \frac{2}{1001}$ $(\frac{C_6^5}{C_{15}^5} = \frac{2}{1001})$;

b) B — visi parinkti 5 žmonės yra dešiniarankiai; $m = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$, $\mathbf{P}(B) = \frac{126}{3003} = \frac{6}{143}$ $(\frac{C_9^5}{C_{15}^5} = \frac{6}{143})$;

c) C — iš 5 parinktų žmonių 3 yra kairiarankiai ir 2 dešiniarankiai; $m = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 720$, $\mathbf{P}(C) = \frac{720}{3003} = \frac{240}{1001}$ $(\frac{C_6^3 \cdot C_9^2}{C_{15}^5} = \frac{240}{1001})$;

d) D — iš 5 parinktų žmonių 2 yra kairiarankiai ir 3 dešiniarankiai; $m = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1260$, $\mathbf{P}(D) = \frac{1260}{3003} = \frac{60}{143}$ $(\frac{C_6^2 \cdot C_9^3}{C_{15}^5} = \frac{60}{143})$.

346. a) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10! = 3\,628\,800$;

b) Justą ir Povilą greta galima sustatyti 2 būdais (JP arba PJ). Likusius 8 pirmokus galima sustatyti į vieną eilę $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8! = 40\,320$ būdų. Be to, Justo ir Povilo porą kitų atžvilgiu galima pastatyti 9 vietose. Vadinasi, sustatyti pirmokus taip, kad Justas ir Povilas stovėtų greta, yra $2 \cdot 40\,320 \cdot 9 = 725\,760$ skirtingų galimybių;

c) $\mathbf{P}$(Justas ir Povilas stovės greta) $= \frac{725\,760}{3\,628\,800} = \frac{1}{5}$.

347. *Nurodymas.* 347–349 uždaviniai — tai kėlinių, gretinių ir derinių skaičiaus formulių taikymas. Jei teorinę medžiagą išsiaiškinote su moksleiviais be šių formulių arba atvirkščiai — visus uždavinius sprendėte tik remdamiesi šiomis formulėmis, tai šių uždavinių galima ir nespręsti.

Atsakymas. a) 120; b) 40 320; c) 479 001 600.

348. a) 90; b) 30 240; c) 3 628 800; d) 1 860 480;

e) $A_{20}^{15} = 20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$; (*Nurodymas.* Šios sandaugos skaičiavimas užima daug laiko, nes apskaičiavus skaičiuokliu galima parašyti tik apytikslį rezultatą. Todėl galima atsakymą palikti užrašius sandauga.)

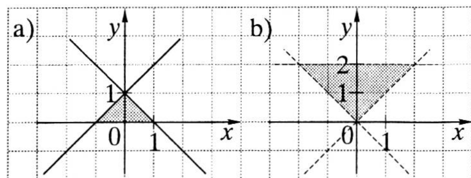
f) 20.

349. a) 45; b) 252; c) 45; d) 15 504; e) 15 504; f) 1.

350. a) $(-\infty; +\infty)$; b) sprendinių nėra; c) sprendinių nėra; d) $(-\infty; +\infty)$; e) $(-5; 2)$; f) $(-5; 3)$.

351. a) *Nurodymas.* Patartume šį punktą spręsti tik stipresniems moksleiviams, nes tenka atlikti gana griozdiškus skaičiavimus.
$P = \sqrt{2145} + \sqrt{1185} = \sqrt{15}(\sqrt{143} + \sqrt{79})$ (cm);
b) 84 cm.

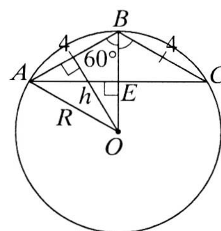
352.



353. Sakykime, kad priekinio rato apskritimo ilgis yra x dm. Tada užpakalinio rato apskritimo ilgis bus $2x$ dm. 120 m (1200 dm) kelio atkarpoje priekinis ratas apsisuks $\frac{1200}{x}$, o užpakalinis — $\frac{1200}{2x}$ kartų. Pagal sąlygą: $\frac{1200}{x+4} - \frac{1200}{2x-2} = 20$.
Atsakymas. 11 dm ir 22 dm; arba 16 dm ir 32 dm.

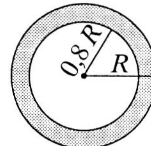
354. a) -21 ir 0; b) $-2{,}5$ ir 0.

355. a) $\angle ABO = 60°$, $AO = OB = R$, tai $\triangle AOB$ — lygiakraštis ir $R = 4$ cm. Tada $2R = 2 \cdot 4 = 8$ (cm);
b) $OE = EB = \frac{R}{2} = \frac{4}{2} = 2$ (cm); $h = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ (cm). Atstumas nuo O iki kraštinės BC taip pat yra $2\sqrt{3}$ cm.



356. Kūgio tūris $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$. Pagrindo spindulį pailginę 3 kartus, o aukštinę sutrumpinę 3 kartus turėsime: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot (3r)^2 \cdot \frac{H}{3} = 3 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 H = 3V$. Taigi kūgio tūris padidės 3 kartus.

357. $S_{\text{žiedo}} = \pi\big(R^2 - (0{,}8R)^2\big) = 0{,}36\pi R^2$.
a) $S_{\text{žiedo}} = \pi\big((1{,}2R)^2 - (1{,}2 \cdot 0{,}8R)^2\big) = 0{,}5184\pi R^2$; $\frac{0{,}5184\pi R^2}{0{,}36\pi R^2} = 1{,}44$;
b) $S_{\text{žiedo}} = \pi\big((1{,}1R)^2 - (0{,}95 \cdot 0{,}8R)^2\big) = 0{,}6324\pi R^2$; $\frac{0{,}6324\pi R^2}{0{,}36\pi R^2} = 1\frac{227}{300}$, t. y. maždaug 1,8.
Atsakymas. Padidės: a) 1,44 karto; b) $\approx 1{,}8$ karto.



358. a) (0; 5); b) (3; 2).

5.2. Nepriklausomi įvykiai

Šiame neprivalomame skyrelyje aiškinama nepriklausomų įvykių (bandymų) sąvoka ir mokoma apskaičiuoti tikimybę įvykio, sudaryto iš dviejų nepriklausomų įvykių.

Nurodymai. 1) Mokiniams nepriklausomumo sąvoka gali būti lengviau suprantama, kai ją siejame su bandymais, o ne su įvykiais. Kai bandymai nepriklausomi, tai neprikausomi ir du įvykiai, kurių vienas susijęs su vienu bandymu, o kitas — su kitu. Pavyzdžiui, vadovėlyje nagrinėjamame 1 pavyzdyje sakoma, kad: *metama moneta ir lošimo kauliukas.* Čia, aišku, galvoje turimas vienas bandymas ir nagrinėjami tarpusavyje nepriklausomi to bandymo įvykiai: monetos atsivertimas ir kauliuko atsivertimas. Šį bandymą galima pakeisti dviem bandymais pabrėžiant, kad vieną kartą (pirmu bandymu) meskime monetą, o kitą kartą (antru bandymu) — lošimo kauliuką. Akivaizdu, kad šių bandymų rezultatai tarpusavyje nesusiję — kokia puse atsivers moneta, nepriklauso nuo to, kokia siena atvirs kauliukas, ir atvirkščiai. Todėl mokiniams galima patarti transformuoti sąlygoje pateikiamą situaciją į jiems patogesnę, paprastesnę, aiškesnę.

2) Teorinėje dalyje nagrinėjami trys pavyzdžiai ir vienas uždavinys. Visus juos galima spręsti ir nesiejant jų su *nepriklausomumu.* Galima tiesiog remtis klasikiniu tikimybės apibrėžimu ir gauti norimą rezultatą. Tačiau yra uždavinių, kur klasikinis tikimybės apibrėžimas negelbsti, o skaičiuojant tikimybę būtina remtis formule (žr. 362–366 uždaviniai).

3) Nepriklausomų įvykių A ir B tikimybės skaičiavimas $\mathbf{P}(\text{ir } A, \text{ ir } B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$ glaudžiai siejasi su kombinatorine daugybos taisykle. Tik čia dauginami ne galimybių skaičiai, bet tikimybės.

Pakartoti:

klasikinį tikimybės apibrėžimą;
kombinatorinę daugybos taisyklę;
galimybių medį.

Išmokti:

kokie įvykiai (bandymai) vadinami nepriklausomais;
apskaičiuoti nepriklausomų įvykių A ir B tikimybę remiantis formule $\mathbf{P}(A \text{ ir } B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$.

Šiame skyrelyje:

1. Pirmu pavyzdžiu nagrinėjant monetos ir lošimo kauliuko metimo situaciją aiškinama nepriklausomų įvykių (bandymų) sąvoka ir mokoma apskaičiuoti tikimybę įvykio, sudaryto iš dviejų nepriklausomų įvykių.

Nurodymai. 1) Pirmiausia reikia, kad iš šio pavyzdžio mokiniai suprastų, jog bandymo rezultatas nepriklauso nuo to, ar monetą ir kauliuką mesime vienu metu, ar pirmiau mesime monetą (kauliuką), o po to kauliuką (monetą), ar moneta ir kauliukas bus metami to paties asmens, ar skirtingų asmenų ir pan. Todėl pirmiausia galima liepti mokiniams apskaičiuoti su šiuo bandymu susijusių įvykių tikimybes:

$\mathbf{P}(A)$ — tikimybę atsiversti, pavyzdžiui, 5 akutėms;
$\mathbf{P}(S)$ — tikimybę atsiversti skaičiui;
ir paklausti mokinių, kaip jie mano, ar $\mathbf{P}(A)$ (ar $\mathbf{P}(S)$) priklauso nuo to, kuria puse atvirto moneta (ar kauliukas). Čia mokiniai turėtų nesunkiai surasti atsakymą, kad vieno įvykio tikimybė nepriklauso nuo kito įvykio baigties. Tai išsiaiškinus jau galima suformuluoti nepriklausomų įvykių apibrėžimą: „Įvykiai A ir B yra nepriklausomi, jei vieno jų įvykimas neturi įtakos kito įvykio tikimybei“.

2) Svarbu, kad mokiniai suprastų, ką reiškia pasakymas, jog įvyko įvykis „A ir S“, t. y. kauliukas atsivertė penkiuke, o moneta — skaičiumi. Čia reikia akcentuoti, kad užrašas „A ir S“ reiškia, jog įvyko *ir* įvykis A, *ir* įvykis S. Aišku, kad „A ir S“ bei „S ir A“ reiškia tą patį įvykį. Todėl galima liepti mokiniams patiems apskaičiuoti tikimybę $\mathbf{P}(A \text{ ir } S)$.

3) Svarbu, kad mokiniai „patikėtų“ lygybės $\mathbf{P}(A \text{ ir } S) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(S)$ teisingumu. Tam gali padėti ir tokia lentelė:

Bandymas	Metama moneta		Metamas kauliukas		Metama moneta ir metamas kauliukas
Baigtys	H, S		1, 2, 3, 4, 5, 6		$H1$, $H2$, $H3$, $H4$, $H5$, $H6$, $S1$, $S2$, $S3$, $S4$, $S5$, $S6$
Baigčių skaičius	2	×	6	=	12
Įvykis	Atvirto skaičius		Atvirto 5 akutės		Atvirto skaičius ir 5 akutės
	S		5		$S5$
Įvykio skaičius	1	×	1	=	1
Įvykio tikimybė	$\frac{1}{2}$	×	$\frac{1}{6}$	=	$\frac{1}{12}$

4) Svarbu, kad mokiniai suprastų, jog galima kalbėti ne tik apie nepriklausomus įvykius, bet ir apie nepriklausomus bandymus. Tam skirta baigiamoji pirmojo pavyzdžio teksto dalis.

2. Antru pavyzdžiu siekiama parodyti, kad skaičiuoti tikimybę įvykio, sudaryto iš nepriklausomų įvykių, dauginant tų įvykių tikimybes galima ir tada, kai tas įvykis sudarytas ir iš daugiau kaip dviejų nepriklausomų įvykių.

Nurodymai. 1) Čia svarbu, kad mokiniai suvoktų, jog metant monetą keturis kartus: $\mathbf{P}(HHHH) = \mathbf{P}(HHHS) = \mathbf{P}(HHSS) = \mathbf{P}(HSSS) = \mathbf{P}(SSSS) = \mathbf{P}(HHSH) = \mathbf{P}(HSHH) = \ldots = \frac{1}{16}$.
2) Atkreipkite mokinių dėmesį, kad jie nepainiotų šio pavyzdžio su tokiu, kai klausiama: kokia tikimybė, kad visus 4 kartus atsivers herbas $(4H)$, kad du kartus atsivers herbas, o kitus du kartus skaičius $(2H, 2S)$ ir pan. Šiais atvejais $\mathbf{P}(4H) = \frac{1}{16}$, $\mathbf{P}(2H, 2S) = \frac{6}{16}$, $\mathbf{P}(1H, 3S) = \frac{4}{16}$.

3. Pateikiamas svarbus uždavinys. Buvo stengtasi pateikti tipinį uždavinį, kurio sprendimas supaprastėja, kai remiamasi įvykių nepriklausomumu.

Nurodymai. 1) Čia mokiniams neturėtų būti sunku patikėti, kad įvykiai A ir B yra nepriklausomi. Įgyti nepriklausomų įvykių supratimą mokiniams padės ir toks kontrpavyzdys: *Vienoje dėžėje yra vienodo dydžio, bet skirtingų spalvų rutuliai — 13 raudonų ir 19 baltų. Iš dėžės nežiūrint paeiliui traukiami du rutuliai. Kokia tikimybė, kad abu ištraukti rutuliai bus raudoni?* Suprantama, kad čia įvykiai A — „ištrauktas pirmas rutulys yra raudonas“ ir B — „ištrauktas antras rutulys yra raudonas“ nėra nepriklausomi. Ne visiems mokiniams tai gali būti lengvai suvokiama. Juk pradinis uždavinys nedaug tepakito — visi rutuliai buvo supilti į vieną dėžę. Tokiems mokiniams vertėtų pateikti dar vieną analogišką uždavinį — tik sakant, kad antroje dėžėje raudonų rutulių nėra iš viso, pavyzdžiui — pirmoje dėžėje yra 5 raudoni ir 10 baltų, o antroje dėžėje — 20 baltų. Čia, aišku, tikimybė ištraukti abu rutulius raudonus lygi 0, o kai rutulius sudėsime į vieną dėžę, akivaizdu, kad ši tikimybė nelygi nuliui.
2) Šį uždavinį galima spręsti ir nesiremiant įvykių nepriklausomumu. Remdamiesi daugybos taisykle apskaičiuojame, kiek iš viso yra skirtingų rutulių porų: $12 \cdot 20 = 240$; ir kiek iš viso yra raudonų rutulių porų: $5 \cdot 8 = 40$. Pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą gauname, kad ieškomoji tikimybė $\mathbf{P} = \frac{40}{240} = \frac{1}{6}$. Pirmoje nurodymo dalyje duoto kontrpavyzdžio atveju gautume, kad rutulių porų yra $32 \cdot 31$, o raudonų — $13 \cdot 12$. Atitinkama tikimybė — $\frac{13 \cdot 12}{32 \cdot 31} = \frac{39}{248}$.
3) Tikslinga šį uždavinį panagrinėti dar vienu atveju, t. y. pakeisti sąlygą taip:
Dviejose dėžėse yra ir raudonų, ir baltų vienodo didumo rutulių. Tikimybė ištraukti raudoną rutulį iš pirmos dėžės lygi $\frac{5}{12}$, o iš antros — $\frac{2}{5}$. Kokia tikimybė traukiant po vieną rutulį iš kiekvienos dėžės ištraukti abu rutulius raudonus? Čia tereikia pastebėti, kad abu įvykiai yra nepriklausomi, ir sudauginti pateiktas tikimybes. Nors šiuo atveju sprendimas supaprastėja, bet mokiniams jis kartais būna sunkesnis už pradinį uždavinį.
4) Verta paprašyti mokinių apskaičiuoti tikimybes ir kitų su šiuo bandymu susijusių įvykių. Pavyzdžiui, paklausti, kokia tikimybė ištraukti:

- abu baltus rutulius
  ($\mathbf{P}(B_1, B_2) = \frac{7}{12} \cdot \frac{12}{20} = \frac{7}{20}$);
- iš pirmos dėžės baltą, iš antros — raudoną
  ($\mathbf{P}(B_1, R_2) = \frac{7}{12} \cdot \frac{8}{20} = \frac{7}{30}$);
- iš pirmos — raudoną, iš antros — baltą
  ($\mathbf{P}(R_1, B_2) = \frac{5}{12} \cdot \frac{12}{20} = \frac{1}{4}$);
- abu rutulius skirtingų spalvų
  ($\mathbf{P}(\text{skirtingų spalvų}) = 1 - \mathbf{P}(B_1, B_2) - \mathbf{P}(R_1, R_2) = 1 - \frac{7}{20} - \frac{1}{6} = \frac{29}{60}$, arba $\mathbf{P}(B_1, R_2) + \mathbf{P}(R_1, B_2) = \frac{7}{30} + \frac{1}{4} = \frac{29}{60}$);
- abu rutulius vienodų spalvų
  ($\mathbf{P}(\text{vienodų spalvų}) = \frac{31}{60}$).

5) Pirmame nurodymo punkte pateiktą kontrpavyzdį galima nagrinėti, kai pirmas paimtas rutulys yra grąžinamas į dėžę, o tada traukiamas antras — tai situacija, analogiška vadovėlio 3 pavyzdžiui.

4. Pateikiamas pavyzdys siekiant parodyti atvejį, kai įvykiai nėra nepriklausomi.

Nurodymai. 1) Šis pavyzdys siejasi su prieš tai buvusiu uždaviniu, tik rutuliai yra vienoje dėžėje. Jei prieš tai buvusį uždavinį išnagrinėjote, kaip nurodyta aukščiau, tai čia neturėtų kilti sunkumų.
2) Atkreipkite dėmesį, kad rutulius čia patogu sunumeruoti.

359–368 uždaviniai yra teminiai, o kiti — kartojimo.

Uždavinyne šiai temai skirtų uždavinių nėra.

359. a) Pažymėkime įvykius:
A — „moneta atsivertė herbu“; $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}$;
B — „lošimo kauliukas atsivertė šešetu“; $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{6}$;
A ir B — „moneta atsivertė herbu, o lošimo kauliukas šešetu“.
Kadangi įvykiai A ir B yra nepriklausomi (monetos metimo rezultatas neturi įtakos kauliuko metimo tikimybei), tai
$\mathbf{P}(A \text{ ir } B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.
b) Pažymėkime įvykius:
A — „moneta atsivertė skaičiumi“; $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}$;
B — „lošimo kauliukas atsivertė skaičiumi, daliu iš 3“; $\mathbf{P}(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;
A ir B — „moneta atsivertė skaičiumi, o lošimo kauliukas skaičiumi, daliu iš 3“.
Kadangi įvykiai A ir B yra nepriklausomi, tai
$\mathbf{P}(A \text{ ir } B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
Pastaba. Taip rekomenduojame apiforminti ir kitų tokio tipo uždavinių sprendimą.

360. a) $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{18}$; b) $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$.

361. a) $\frac{8}{12} \cdot \frac{6}{10} = \frac{2}{5}$; b) $\frac{4}{12} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{15}$; c) $\frac{8}{12} \cdot \frac{2}{10} = \frac{2}{15}$; d) $\frac{4}{12} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{15}$;
e) $\frac{8}{12} \cdot \frac{4}{10} = \frac{4}{15}$.

362. a) $0,8 \cdot 0,8 = 0,64$; b) $0,2 \cdot 0,2 = 0,04$; c) $0,8 \cdot 0,2 = 0,16$;
d) $0,2 \cdot 0,8 = 0,16$.

363. a) $0,85 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,476$; b) $0,15 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,009$;
c) $0,85 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,051$; d) $0,85 \cdot 0,8 \cdot 0,3 = 0,204$.

364. $0,99 \cdot 0,99 \cdot 0,99 = 0,970299$.

365. a) $0,12 \cdot 0,2 = 0,024$; b) $0,88 \cdot 0,8 = 0,704$; c) $0,12 \cdot 0,8 = 0,096$;
d) $0,88 \cdot 0,2 = 0,176$.

366. a) $0,8 \cdot 0,7 = 0,56$; b) $0,2 \cdot 0,3 = 0,06$.

367. a) $\frac{40}{50} = \frac{4}{5}$; b) $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$; c) $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$; d) $\frac{10}{50} \cdot \frac{15}{60} = \frac{1}{20}$.

368. a) $\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{400}$; b) $\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{8000}$; c) $\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{160\,000}$.

369. a) $(1; 2; 3)$, $(3; 4; 1)$; b) $(-3; 0; -1)$, $(-1; -2; -3)$.
Nurodymas. Iš pirmosios lygties išreikškite x-ą, iš antrosios — z-ą ir įrašykite jų išraiškas į trečiąją lygtį.

370. a) 6%;
b)

Mokėjimai (pusmečiai)	Paskolos likutis (Lt)	Palūkanos (Lt)	Grąžinama paskola (Lt)	Iš viso grąžinama (Lt)
1	18 000	1080	3000	4080
2	15 000	900	3000	3900
3	12 000	720	3000	3720
4	9 000	540	3000	3540
5	6 000	360	3000	3360
6	3 000	180	3000	3180
Iš viso:	—	3780	18 000	21 780

371. a) 6500 Lt, 8400 Lt; b) 6000 Lt, 8999,27 Lt.
Nurodymas. Taikome formulę: a) $S_t = S\left(1 + \frac{p}{100} \cdot t\right)$; b) $S_t = S\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$.

372. a) $\frac{4a+2}{a(a-1)}$; b) $\frac{2a+6}{a(a+2)}$; c) $\frac{3y}{50x}$; d) $\frac{15a^2}{4b}$.

373. a) 6 (taikome trikampio pusiaukampinės savybę);
b) 3,75 (duoti du trikampiai yra panašūs);
c) 8 (taikome trikampio pusiaukampinės savybę);
d) 20 (taikome trikampio pusiaukraštinių savybę).

374. a) $(350 + 45\pi)$ mm; b) $(2000 + 337,5\pi)$ mm^2.

375. a) Vandens kiekis inde bus lygus tūriui ritinio, kurio $r = \frac{20}{2} = 10\,(\text{cm})$, o $h = 15\,\text{cm}$. Kadangi $V_{\text{ritinio}} = \pi r^2 h$, tai vandens kiekis inde bus lygus $\pi \cdot 10^2 \cdot 15 = 1500\pi \approx 4710\,\text{cm}^3 = 4{,}71\,\text{dm}^3 = 4{,}71\,\ell$.

b) Panardinus į vandenį rutulį, vandens užimamas tūris padidės tūriu, kuris lygus rutulio tūriui, t. y. $V_{\text{vandens}} = 1500\pi + V_{\text{rut}} = 1500\pi + \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 1788\pi\,(\text{cm}^3)$. Kadangi vanduo yra ritinio formos inde, tai vandens užimamas tūris bus lygus tūriui ritinio, kurio $r = 10\,\text{cm}$, o aukštis yra h, t. y. $1788\pi = \pi \cdot 10^2 \cdot h$, $h = 17{,}88\,(\text{cm})$, t. y. $\approx 17{,}9\,\text{cm}$.

376. a) -3 ir 2;

b) $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$;

c) funkcijos $f(x) = x^2 + x - 6$ grafikas — parabolė, kurios šakos eina į viršų; viršūnės koordinatės yra $(-0{,}5; -6{,}25)$; x-ų ašį kerta taškuose $(-3; 0)$ ir $(2; 0)$;

d) mažiausia trinario reikšmė yra lygi $-6{,}25$;

e) trinario reikšmės yra teigiamos, kai $x < -3$ ir $x > 2$; yra neigiamos, kai $-3 < x < 2$;

f) trinario reikšmės yra neteigiamos, kai $-3 \leqslant x \leqslant 2$; yra neneigiamos, kai $x \leqslant -3$ ir $x \geqslant 2$.

377. a) $y = \frac{12}{x}$;

b) $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $-\frac{1}{4}$, -36;

c) skaičiaus y priklausomybės nuo x grafikas yra hiperbolė $y = \frac{12}{x}$.

378. a) 6; b) 5.

Nurodymas. Patogu duotas trupmenas subendravardiklinti ir taikyti dviejų skaičių sumos (skirtumo) kvadrato formulę.

379. Laužiant visą plytelę ar jos dalį į dvi dalis, dalių skaičius kiekvieną kartą padidėja vienetu. Kadangi iš pradžių buvo 1 šokolado plytelė, o galų gale jos gaunama 30 gabaliukų, tai laužti reikės $30 - 1 = 29$ (kartus).

5.3. Atsitiktinis dydis

Šis skyrelis yra „teorinio“ pobūdžio ir skirtas pasiruošti skyrelio „Matematinė viltis“ medžiagai nagrinėti. Skyrelis skirtas parodyti, kaip galima su bandymu susijusius atsitiktinius įvykius nusakyti atsitiktiniu dydžiu (atsitiktinio dydžio skirstiniu). Atsitiktinio dydžio skirstinį galima suprasti kaip funkciją, kuri atsitiktinio dydžio reikšmėms priskiria tikimybes, su kuriomis tos reikšmės įgyjamos. Šiuo atveju ta funkcija nusakoma lentele. Todėl čia vertėtų pakartoti, kaip galima du priklausomus dydžius nusakyti lentele.

Pakartoti, ką vadiname funkcija.

Išmokti:

ką vadiname atsitiktiniu dydžiu;

sudaryti atsitiktinio dydžio lentelę (skirstinį).

Šiame skyrelyje nagrinėjant su monetos mėtymu susijusį bandymą aiškinama atsitiktinio dydžio ir atsitiktinio dydžio skirstinio sąvoka.

Nurodymas. Čia mokiniai turi suprasti, kad nusakant atsitiktinio dydžio skirstinį būtina nurodyti *visas* galimas atsitiktinio dydžio reikšmes, o tų dydžių tikimybių suma turi būti lygi 1.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

380–389 — teminiai, o 390–400 — kartojimo uždaviniai. 41

380. *Nurodymas.* Reikia patikrinti, ar tikimybių suma lygi 1.

a) Kadangi $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$, tai lentelė gali reikšti kurio nors atsitiktinio dydžio skirstinį;

b) kadangi $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{6}{5}\neq 1$, tai lentelė negali reikšti kurio nors atsitiktinio dydžio skirstinio;

c) ne; d) gali.

381. Atsitiktinis dydis X gali įgyti šešias skaitines reikšmes: 1, 2, 3, 4, 5 ir 6. Šių reikšmių įgijimo tikimybės: $\mathbf{P}(X=1)=\frac{1}{6}$, $\mathbf{P}(X=2)=\frac{1}{6}$, $\mathbf{P}(X=3)=\frac{1}{6}$, $\mathbf{P}(X=4)=\frac{1}{6}$, $\mathbf{P}(X=5)=\frac{1}{6}$, $\mathbf{P}(X=6)=\frac{1}{6}$.

Atsitiktinio dydžio X skirstinys:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

382. Atsitiktinis dydis Y gali įgyti tokias skaitines reikšmes: 0 (abi monetos atsivertė herbu), 10 (10 ct moneta atsivertė skaičiumi, o 20 ct — herbu), 20 (10 ct moneta atsivertė herbu, o 20 ct — skaičiumi) ir 30 (abi monetos atsivertė skaičiumi).

Atsitiktinio dydžio Y skirstinys:

Y	0	10	20	30
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

383. Atsitiktinio dydžio X skirstinys:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Atsitiktinio dydžio Y skirstinys:

Y	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Nurodymai: 1) Galima susidaryti lentelę, kur skaičiuojama atvirtusių akučių suma (sandauga). Tuomet bus lengviau suskaičiuoti gautų reikšmių įgijimo tikimybes.

2) Skaičiuojant tikimybes gautas trupmenas visai nebūtina prastinti.

384. Atsitiktinio dydžio Z skirstinys:

Z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Atsitiktinio dydžio W skirstinys:

W	0	5	10	15	20	25	30
P	$\frac{6}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Nurodymai. 1) Kaip ir prieš tai buvusiame uždavinyje patogu susidaryti lentelę, kur skaičiuojama atvirtusių akučių ir centų suma (sandauga).

2) Atkreipkite moksleivių dėmesį, kad atsitiktinio įvykio „atsivertė herbas“ skaitinė reikšmė lygi 0.

385. Pirmiausia reikia suskaičiuoti, kiek bilietų nelaimi nieko (galima sakyti — laimi po 0 Lt). Tokių bilietų yra: a) 46; b) 82.

a) Atsitiktinio dydžio X skirstinys:

X	0	1	2	5	10
P	0,46	0,2	0,2	0,1	0,04

b) Atsitiktinio dydžio Y skirstinys:

Y	0	1	5	10	20	50
P	0,41	0,4	0,1	0,06	0,02	0,01

Pastaba. Dažnai mokiniai neatkreipia dėmesio į sąlygos dalį, kad kiti bilietai nelaimi nieko. Todėl užrašydami atsitiktinio dydžio skirstinį praleidžia stulpelį, kur atsitiktinio dydžio įgyjama reikšmė lygi nuliui. Tokiu atveju pasiūlykite suskaičiuoti lentelėje surašytų tikimybių sumą ir pasiaiškinkite, kodėl gauta suma yra mažesnė už 1 (žinoma, taip bus, jei visi kiti skaičiavimai atlikti teisingai).

386. Iš viso dėžėje yra $2+3=5$ rutuliai. Ištraukti du rutulius iš penkių yra $\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$ skirtingų galimybių. Tie ištraukti rutuliai gali būti arba abu juodi, arba vienas juodas ir vienas baltas, arba abu balti. Vadinasi, ir atsitiktinis dydis X, ir atsitiktinis dydis Y gali įgyti po tris skaitines reikšmes: 0, 1 ir 2. Kadangi ištraukti abu juodus rutulius (nei vieno balto) yra $\frac{3\cdot2}{2\cdot1}=3$ skirtingos galimybės; ištraukti vieną juodą ir vieną baltą yra $3\cdot2=6$ skirtingos galimybės; ištraukti abu baltus (nei vieno juodo) yra $\frac{2\cdot1}{2\cdot1}=1$ galimybė, tai atsitiktinio dydžio X skaitinių reikšmių įgijimo tikimybės yra: $\mathbf{P}(X=0)=\frac{3}{10}=0{,}3$, $\mathbf{P}(X=1)=\frac{6}{10}=0{,}6$, $\mathbf{P}(X=2)=\frac{1}{10}=0{,}1$; atsitiktinio dydžio Y skaitinių reikšmių įgijimo tikimybės yra: $\mathbf{P}(Y=0)=\frac{1}{10}=0{,}1$, $\mathbf{P}(Y=1)=\frac{6}{10}=0{,}6$, $\mathbf{P}(Y=2)=\frac{3}{10}=0{,}3$.

Atsitiktinio dydžio X skirstinys:

X	0	1	2
P	0,3	0,6	0,1

Atsitiktinio dydžio Y skirstinys:

Y	0	1	2
P	0,1	0,6	0,3

387. Atsitiktinio dydžio X skirstinys:

X	0	1	2
P	0,1	0,6	0,3

Atsitiktinio dydžio Y skirstinys:

Y	1	2	3
P	0,3	0,6	0,1

Pastaba. Atkreipkite moksleivių dėmesį, kad atsitiktinis dydis X gali įgyti skaitinę reikšmę, lygią 0 (kadangi yra 2 balti ir 3 raudoni rutuliai, tai atsitiktinai traukiant 3 rutulius gali nutikti taip, kad visi trys rutuliai bus raudoni, t. y. baltų rutulių nebus). Tuo tarpu atsitiktinis dydis Y neįgyja skaitinės reikšmės, lygios 0, nes įvykis „visi 3 ištraukti rutuliai yra balti“ yra negalimas.

388.

X	0	1	2	3
P	$\frac{20}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{4}{120}$

389. a) Atsitiktinio dydžio X įgyjamos skaitinės reikšmės yra: $3-2=1$, $4-2=2$, $5-2=3$ ir $6-2=4$, t. y. 1, 2, 3 ir 4.

Atsitiktinio dydžio X skirstinys:

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

b)

X	1	2	3
P	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

390. *Nurodymas.* Reikia pertvarkyti kairiąją lygybės pusę, iš pradžių kvadratinį trinarį išskaidant dauginamaisiais — parašant dvinario kvadratu.

391. a) $(-\infty; +\infty)$; b) 2; c) $(-\infty; 2)$, $(2; +\infty)$; d) sprendinių nėra; e) $(-3; -2)$, $(2; 3)$; f) $(-\infty; -1)$, $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$.

392. Sprendžiame lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \frac{x-y}{x+y} = \frac{3}{8}, \\ \frac{x-y}{xy} = \frac{6}{55}. \end{cases}$$

Ieškomi skaičiai yra 11 ir 5.

393. a) $a_n = 4n - 34$; 1) 766; 2) 73 600;
b) $a_n = 3n - 29$; 1) 571; 2) 54 500.
Nurodymas. Pakartokite aritmetinės progresijos n-tojo nario ir pirmųjų n narių sumos formules.

394. a) $M = 0{,}0875m$; b) 8,75 kg, 13,125 kg, 21,875 kg, 35 kg;
c) 200 kg, 240 kg, 3000 kg, 4200 kg.

395. Galima sudaryti lygčių sistemą:

$$\begin{cases} k + v = 52, \\ v + g = 43, \\ g + p = 34, \\ p + x = 30, \\ k + v + g + p + x = 100; \end{cases}$$

čia k — Karolis, v — Vytautas, g — Gediminas, p — Povilas, x — Vilius.
Iš pirmos lygties išreiškę nežinomąjį k, iš trečios — nežinomąjį g ir įstatę į penktąją lygtį gausime, kad $x = 14$. Tada $p = 16$, $g = 18$, $v = 25$ ir $k = 27$.
Sudarytą lygčių sistemą galima spręsti ir kitaip. Sudėję panariui keturias pirmąsias lygtis gausime: $k+2v+2g+2p+x = 159$. Kadangi $k+v+g+p+x = 100$, tai $v + g + p = 59$. Tada $v = 25$, $p = 16$, $k = 27$, $x = 14$, $g = 18$.
Neblogas ir toks būdas: iš penktos lygties atėmę pirmą ir trečią, randame x; atėmę pirmą ir ketvirtą, randame g; atėmę antrą ir ketvirtą, randame k.

396. a) $P = (18 + 6\pi)$ cm, $S = (54\pi - 81\sqrt{3})$ cm^2;
b) $P = (18\sqrt{3} + 12\pi)$ cm, $S = (108\pi - 81\sqrt{3})$ cm^2.

397. 18 cm. *Nurodymas.* Taikykite apibrėžtinio keturkampio savybę.

398. Trikampio, panašaus į duotąjį trikampį, statinių ilgiai yra: a) 3 cm ir 4,5 cm; b) 6 cm ir 9 cm.

399. a) 12 cm; b) 6 cm; c) $6\sqrt{3}$ cm; d) $72\sqrt{3}\pi$ cm^3.

400. *Nurodymas.* Patogu duotus reiškinius pertvarkyti:
$\sqrt{75} - \sqrt{27} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$; $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
Atsakymas. a) $4\sqrt{3}$; b) 0; c) 12; d) 1; e) 24; f) 48; g) $192\sqrt{3}$.

5.4. Matematinė viltis

Šiame skyrelyje aiškinama visiškai nauja, pagrindinėje mokykloje iki šiol nenagrinėta, sąvoka — matematinė viltis. Matematinė viltis bus nagrinėjama ir vidurinės mokyklos išplėstiniame kurse. Todėl nesant laiko galima šio skyrelio nenagrinėti iš viso.

Bet skyrelis yra įdomus ir praktiškai naudingas, be to, nieko sudėtingo jame nėra.

Svarbiausia, kad mokiniai suvoktų sąvokos matematinė viltis prasmę. O tai turėtų būti nesunku, išsiaiškinus vadovėlyje nagrinėjamą situaciją.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

401–410 uždaviniai yra teminiai, o kiti — kartojimo. 42–52

401. a) $\mathbf{E}X = 1 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{6} = 2\frac{2}{3}$;
b) $\mathbf{E}X = -2 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}3 = 1{,}8$.

402. $6 \cdot 0{,}05 + 7 \cdot 0{,}10 + 8 \cdot 0{,}15 + 9 \cdot 0{,}50 + 10 \cdot 0{,}20 = 8{,}7$.

403. Kadangi ratas padalytas į 6 *lygias* dalis, tai:
$\mathbf{P}$(rodyklė sustojo sektoriuje 2) $= \frac{1}{6}$; $\mathbf{P}$(rodyklė sustojo sektoriuje 4) $= \frac{2}{6}$;
$\mathbf{P}$(rodyklė sustojo sektoriuje 6) $= \frac{2}{6}$; $\mathbf{P}$(rodyklė sustojo sektoriuje 12) $= \frac{1}{6}$.
a) Žaidėjo išlošio X skaitinės reikšmės yra: $2-4=-2$; $4-4=0$; $6-4=2$ ir $12-4=8$. Žaidėjo išlošis X — atsitiktinis dydis, kurio skirstinys yra

X	-2	0	2	8
$\mathbf{P}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Tada $\mathbf{E}X = -2 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{2}{6} + 2 \cdot \frac{2}{6} + 8 \cdot \frac{1}{6} = 1\frac{2}{3}$ (Lt);
b) $\mathbf{E}X = -4 \cdot \frac{1}{6} - 2 \cdot \frac{2}{6} + 0 \cdot \frac{2}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$ (Lt).
Pastaba. Galima mokinių paklausti — ką reiškia, kai išlošio matematinė viltis yra neigiamas skaičius.

404. Apskaičiuokime žaidėjo išlošio X matematinę viltį:
$\mathbf{E}X = 10 \cdot \frac{1}{8} + 20 \cdot \frac{2}{8} + 30 \cdot \frac{3}{8} + 40 \cdot \frac{1}{8} + 50 \cdot \frac{1}{8} = 28{,}75$ (ct). Taigi minimali vieno pasukimo kaina turėtų būti 29 ct.

405. Jei iš 300 bilietų vienas yra laimingas, tai 299 bilietai bus nelaimingi.
$\mathbf{E}X = 0 \cdot \frac{299}{300} + 150 \cdot \frac{1}{300} = \frac{1}{2}$ (Lt).

406. 3,2 Lt.

407. a) Kiekvieno laimėjimo dydžio tikimybė lygi $\frac{1}{6}$; b) 3,5 Lt.
Pastaba. Pastebėkite, kad tuo atveju, kai tikimybės yra lygios, tai matematinė viltis lygi atsitiktinio dydžio reikšmių aritmetiniam vidurkiui, t. y. $(1+2+3+4+5+6) : 6 = 3{,}5$.

408. a) Metant dvi monetas iš viso yra 4 vienodai galimi elementarieji įvykiai: hh, hs, sh, ss. Todėl $\mathbf{P}$(žaidėjas laimi 1 litą) $= \frac{1}{4}$.
b) Žaidėjo išlošis X — atsitiktinis dydis, kurio skirstinys yra

X	0	1
$\mathbf{P}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Tada $\mathbf{E}X = \frac{1}{4}$ (Lt). Taigi didžiausia vieno metimo kaina gali būti 25 ct. Tada žaidimas nebus nuostolingas žaidėjui.

409. Išlošis X — atsitiktinis dydis, kurio skirstinys yra

X	0	3	6
$\mathbf{P}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

Tada $\mathbf{E}X = 3$. Vadinasi, toks žaidimas organizatoriams yra nenaudingas.

410. $\mathbf{P}$(iškrito trys skaičiai) $= \frac{1}{8}$, $\mathbf{P}$(iškrito du skaičiai) $= \frac{3}{8}$,
$\mathbf{P}$(iškrito vienas skaičius) $= \frac{3}{8}$, $\mathbf{P}$(iškrito trys herbai) $= \frac{1}{8}$.
Atsitiktinis dydis X — laimėjimo dydis litais. Jo skirstinys yra

X	$0{,}1$	$0{,}2$	$0{,}5$	1
$\mathbf{P}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Tada $\mathbf{E}X = 0{,}4$. Taigi vieno metimo kaina turėtų būti 40 ct.

411. a) $(-2; 0)$, $(6; +\infty)$; b) $(-\infty; -1)$, $(1; 5)$; c) $(0; 6)$.

412. 4 ir 36. *Nurodymas*. Sprendžiame lygčių sistemą: $\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 20, \\ \sqrt{xy} = 12. \end{cases}$

413. a) $4\sqrt{2}$; b) $8\sqrt{2}$; c) $62\sqrt{2} + 60$; d) $30\sqrt{2} + 28$.

414. *Nurodymas*. Čia reikia prisiminti, kad prekės kaina susideda iš dviejų dalių: viena dalis, pažymėkime ją a, lieka pardavėjui, o kita dalis, lygi $0,18a$, atitenka valstybei kaip PVM mokestis. Todėl pirkėjas už prekę moka $a+0,18a = 1,18a$.

I būdas.

a) $0,18a = 3,24$, $a = 18$; $1,18a = 21,24$ (Lt);

b) $0,18a = 8,46$, $a = 47$; $1,18a = 55,46$ (Lt).

II būdas. Sakykime, kad prekių pirkta už x Lt. Tada:

a) $\begin{array}{r} x\,\text{Lt} - 118\%, \\ 3,24\,\text{Lt} - 18\%, \end{array}$ $x = 21,24$ Lt;

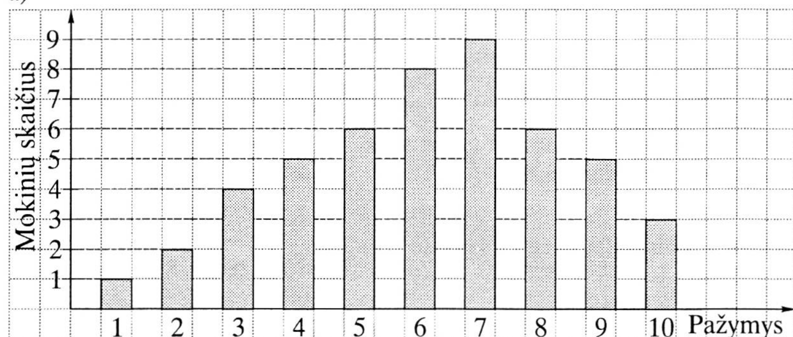
b) $\begin{array}{r} x\,\text{Lt} - 118\%, \\ 8,46\,\text{Lt} - 18\%, \end{array}$ $x = 55,46$ Lt.

415. 45°, 90°, 135°, 90°. *Nurodymas*. Taikome įbrėžtinio keturkampio savybę.

416. Sakykime, kad vieno kūno greitis yra x m/min, o kito y m/min ($x > y$). Kadangi per 24 s abu kūnai priartėja vienas prie kito $42 - 28 = 14$ (m) (pagal sąlygą), tai kūnų greičių suma lygi $\frac{14 \cdot 60}{24}$ m/min = 35 m/min. Vadinasi, $x + y = 35$.
Kadangi judėdami priešpriešiais kūnai susitinka kas 8 min, tai apskritimo ilgis lygus $35 \cdot 8 = 280$ (m).
Kadangi judėdami viena kryptimi kūnai vienas pasiveja kitą kas 56 min, tai jų greičių skirtumas lygus $280 : 56 = 5$ (m/min). Vadinasi, $x - y = 5$.
Sprendžiame lygčių sistemą: $\begin{cases} x + y = 35, \\ x - y = 5; \end{cases}$ $x = 20$ m/min, $y = 15$ m/min.
Atsakymas. 20 m/min, 15 m/min, 280 m.

417. *Nurodymas*. Atstumą tarp dviratininkų (kilometrais) priklausomai nuo laiko (minutėmis) galima apskaičiuoti pagal formulę $S(t) = 6 - \frac{1}{15}t$.
Atsakymas. a) 3 km, 2,4 km, 1,2 km, $5\frac{1}{3}$ km; b) po 70 min, po 85 min.

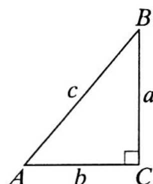
418. a)



b) $\approx 6,14$; c) 6; d) $\mathbf{P}(A) = \frac{6}{7}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{7}$, $\mathbf{P}(C) = \frac{19}{49}$, $\mathbf{P}(D) = \frac{15}{49}$, $\mathbf{P}(E) = \frac{8}{49}$.

6. SMAILIOJO KAMPO TRIGONOMETRINĖS FUNKCIJOS

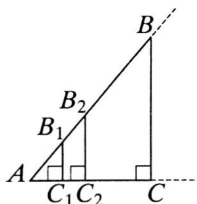
Šis skyrius skirtas stačiojo trikampio nagrinėjimui. Pagrindinis tikslas — išmokyti apskaičiuoti stačiojo trikampio ($\triangle ABC$, $\angle C = 90°$) elementus — kraštinių ilgius (AB, BC, AC) ir kampų didumus ($\angle A$, $\angle B$), kai žinomi du jo elementai, iš kurių bent vienas — kraštinės ilgis (AB ir BC; AB ir AC; BC ir AC; AB ir $\angle A$; AB ir $\angle B$, BC ir $\angle A$, BC ir $\angle B$, AC ir $\angle A$, AC ir $\angle B$). Tam skirtas ketvirtasis šio skyriaus skyrelis. Pirmieji trys skyreliai skirti pasirengti ketvirtajam. Šiuose pirmuosiuose trijuose skyreliuose aiškinama, kaip galima susieti stačiojo trikampio smailiojo kampo didumą su to trikampio dviejų kraštinių ilgių santykiais. Apskritai stačiajame trikampyje ABC ($\angle C = 90°$) galima kalbėti apie šešis skirtingus dviejų jo kraštinių ilgių santykius:



$$\frac{a}{c},\quad \frac{b}{c},\quad \frac{a}{b},\quad \frac{b}{a},\quad \frac{c}{a},\quad \frac{c}{b}.$$

Praktiškai iš minėtų šešių galimų santykių pakanka trijų: $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$, nes $\frac{c}{a} = \frac{1}{\frac{a}{c}}$, $\frac{c}{b} = \frac{1}{\frac{b}{c}}$, $\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{a}{b}}$; ar net dviejų, nes $a^2 + b^2 = c^2$.

Stačiajame trikampyje sieti kraštinių ilgių santykius su smailiųjų kampų didumais yra patogu, nes stačiuosiuose trikampiuose, kurių kampai yra *vienodo didumo*, tie santykiai yra *lygūs*:



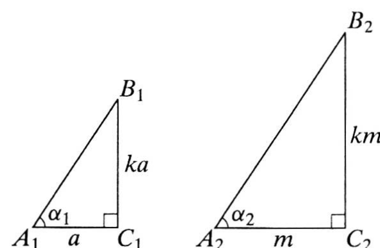
$$\frac{BC}{AB} = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \frac{B_1C_1}{AB_1},\quad \frac{AC}{AB} = \frac{AC_2}{AB_2} = \frac{AC_1}{AB_1},$$
$$\frac{BC}{AC} = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \frac{B_1C_1}{AC_1},\quad \frac{AC}{BC} = \frac{AC_2}{B_2C_2} = \frac{AC_1}{B_1C_1},$$
$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB_2}{B_2C_2} = \frac{AB_1}{B_1C_1},\quad \frac{AB}{AC} = \frac{AB_2}{AC_2} = \frac{AB_1}{AC_1},$$ nes trikampiai panašūs.

Ir atvirkščiai — bet kuris iš tų santykių vienareikšmiškai apsprendžia stačiojo trikampio kampus (kitaip sakant, jei dviejuose stačiuosiuose trikampiuose atitinkamas santykis tas pats, tai jų kampai lygūs).

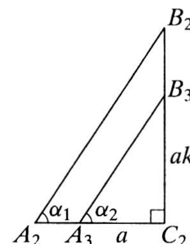
Pavyzdžiui, sakykime, kad pavaizduotuose trikampiuose $A_1B_1C_1$ ir $A_2B_2C_2$ statinių santykis yra tas pats ir lygus k.

Duota: $\triangle A_1B_1C_1$ ($\angle C_1 = 90°$, $A_1C_1 = a$, $C_1B_1 = ka$, $\angle A = \alpha_1$),
$\triangle A_2B_2C_2$ ($\angle C_2 = 90°$, $A_2C_2 = m$, $C_2B_2 = km$).

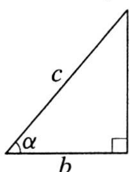
Įrodysime, kad $\alpha_1 = \alpha_2$.



Sakykime, kad $m > a$. Trikampio $A_2B_2C_2$ statinyje C_2A_2 nuo taško C_2 atidėkime atkarpą $C_2A_3 = a$. Per tašką A_3 ir išveskime tiesę lygiagrečią įžambinei A_2B_2. Pagal Talio teoremos išvadą ji statinyje C_2B_2 atkirs atkarpą $C_2B_3 = ak$. $\triangle A_3B_3C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ pagal statųjį kampą ir statinius. Vadinasi, $\alpha_2 = \alpha_1$.



Taigi įsitikinome, kad stačiajame trikampyje, pavyzdžiui, santykis $\frac{a}{c}$ vienareikšmiškai apsprendžia kampą α ir atvirkščiai, kampas α apsprendžia tą santykį. Vadinasi, santykis $\frac{a}{c}$ yra kampo (α) didumo funkcija. Ta funkcija vadinama kampo α sinusu ir žymima $\sin\alpha$. Analogiškai ir su santykiais $\frac{b}{c}$ ir $\frac{a}{b}$:



$$\frac{a}{c} = \sin\alpha,\quad \frac{b}{c} = \cos\alpha,\quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Dydžiai, atvirkštiniai šiems dydžiams, atitinkamai vadinami kampo α kosekantu, sekantu ir kotangentu: $\frac{c}{a} = \frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$, $\frac{c}{b} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$, $\frac{b}{a} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

Šiame skyriuje smailiojo kampo sinusui, kosinusui ir tangentui nagrinėti ir yra skiriami trys pirmieji skyreliai. Vadovėlyje taip pat trumpai supažindinama (daugiausia kaip neprivaloma medžiaga) ir su kotangentu. Apie kotangentą su mokiniais galima ir nekalbėti (programoje, pagal kurią buvo rašomas šis vadovėlis, nurodyta nagrinėti smailiojo kampo sinusą, kosinusą ir tangentą). Bet sprendžiant uždavinius dažnai patogu būna remtis ir kampo kotangentu, todėl turint laiko jo nereikėtų ignoruoti.

Taigi pirmųjų trijų skyrelių pagrindinis tikslas yra supažindinti su iki šiol mokiniams negirdėtomis sąvokomis (stačiojo trikampio smailiojo kampo sinusas, kosinusas ir tangentas), siekiant, kad mokiniai neformaliai jas suprastų. Taip pat šiuose skyreliuose pateikiamos to paties argumento trigonometrinių funkcijų reikšmes siejančios tapatybės:

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,
2) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,
3) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$,
4) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$,
5) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$,
6) $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Pirmosios dvi tapatybės yra pateiktos teorinėje medžiagoje — jas žinoti turi visi mokiniai, o paskutiniosios keturios pateiktos kaip uždaviniai, kuriuos rekomenduojama spręsti tik stipresniesiems mokiniams.

Be to, uždaviniuose kaip neprivaloma mežiaga pateikiamos lygybės:

$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$,
$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$,
$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$,
$\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$.

Prie šių lygybių grįšime 7 skyriuje, todėl čia nevertėtų jų ignoruoti, o turint laiko — nagrinėti su visais mokiniais.

Minimalus lygmuo:

1. Mokėti apskaičiuoti stačiojo trikampio smailiųjų kampų sinusus, kosinusus ir tangentus, kai žinomi to trikampio dviejų kraštinių ilgiai.
2. Žinoti, kam lygūs $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, kai $\alpha = 30°, 45°, 60°$.
3. Žinoti formules $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ir $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ir gebėti jomis remtis sprendžiant paprastus uždavinius.
4. Spręsti stačiuosius trikampius.
5. Žinoti ir mokėti nusakyti, ką vadiname stačiojo trikampio smailiojo kampo sinusu, kosinusu ir tangentu.

Pagrindinis lygmuo:

6. Gebėti pagrįsti lygybes:
   $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
   $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$;
   $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} 45° = 1$, $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$.
7. Gebėti, žinant kampo didumą, rasti to kampo sinusą, kosinusą ir tangentą bei atvirkščiai, žinant kampo sinusą, kosinusą ar tangentą, nustatyti to kampo didumą.
8. Mokėti įrodyti formules $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
9. Žinoti ir gebėti pagrįsti faktą, kad $\sin\alpha < 1$, $\cos\alpha < 1$.

Aukštesnis lygmuo:

10. Žinoti ir mokėti nusakyti, ką vadiname stačiojo trikampio smailiojo kampo kotangentu.
11. Žinoti ir gebėti pagrįsti, kad didėjant kampui to kampo sinusas didėja, o kosinusas mažėja.
12. Žinoti ir gebėti pagrįsti formules:
    $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$;
    $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$, $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$.

6.1. Smailiojo kampo sinusas

Svarbiausia šiame skyrelyje pasiekti, kad visi mokiniai gebėtų nusakyti, kaip apskaičiuoti duotojo stačiojo trikampio smailiųjų kampų sinusus.
Nepasiekus šio tikslo, sunku tikėtis išmokyti po to einančių kitų trijų skyrelių medžiagą. Be to, šiame skyrelyje reikia prisiminti, ko mokyta anksčiau: faktus, susijusių su stačiuoju, lygiašoniu trikampiais, trikampių panašumu. Todėl šiam skyreliui reikia skirti pakankamai laiko ir gerai jo neišmokius neskubėti pereiti prie kitų skyrelių.
Taip pat, ypač su silpnesne klase, naudinga būtų bent vieną pamoką skirti kartojimui (stačiojo trikampio, trikampių panašumo).

Pakartoti:

Pitagoro teoremą;
faktą, kad stačiojo trikampio įžambinė ilgesnė už jo statinius;
faktą, kad stačiajame trikampyje statinis prieš 30° kampą lygus pusei įžambinės;
lygiašonio trikampio apibrėžimą ir savybes;
trikampių panašumo apibrėžimą ir panašumo požymius;
kam lygi trikampio kampų suma;
kam lygi stačiojo trikampio smailiųjų kampų suma;
iracionalumo naikinimą vardiklyje.

Išmokti:

nusakyti, ką vadiname stačiojo trikampio smailiojo kampo sinusu;
kam lygūs kampų 30°, 45°, 60° sinusai;
rasti smailiojo kampo sinusą, žinant jo didumą;
rasti smailiojo kampo didumą, žinant jo sinusą.

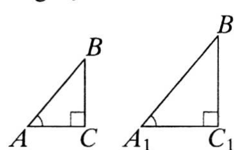
Šiame skyrelyje:

1. Primenami su stačiuoju trikampiu susiję teiginiai:
   - Pitagoro teorema,
   - įžambinės ir statinių ilgių sąryšis,
   - statinio, esančio prieš 30° kampą, savybė.
2. Skaičiuojami statinio, esančio prieš kampą α, ir įžambinės ilgių santykiai, kai $\alpha = 30°, 45°, 60°$.

   Nurodymai. 1) Silpniems mokiniams vadovėlyje pateikti įrodymai gali būti sunkiau suprantami. Geriausia būtų jiems pasiūlyti nusibraižyti stačiuosius trikampius, nurodžius kraštinių ilgius, ir tada liepti įsitikinti nagrinėjamų lygybių teisingumu. Pavyzdžiui, kartojant Pitagoro teoremą ir statinio, esančio prieš 30° kampą, savybę, galima mokinių paklausti: *Kam lygūs stačiojo trikampio kraštinių ilgiai, jei to trikampio vienas kampas lygus* 30°, *o:* a) *statinis, esantis prieš* 30° *kampą, lygus* 1 cm, 2 cm, 3 cm; b) *įžambinė lygi* 1, 2, 3. *Apskaičiuokite šių trikampių statinio, esančio prieš* 30° *kampą, ir įžambinės ilgių santykį.* Panašias užduotis galima pateikti ir su kampais, lygiais 45° ir 60°. Tokiomis užduotimis bus pakartota visa reikiama medžiaga, susijusi su stačiuoju trikampiu, bei įsitikinta, kad nagrinėjami santykiai nepriklauso nuo kraštinių ilgių.
   2) Silpnesniems mokiniams kartais būna sunku nustatyti, kuris statinis yra prieš nurodytą kampą, todėl vertėtų jiems pateikti tokių pratimų.
3. Pateikiamas stačiojo trikampio smailiojo kampo sinuso apibrėžimas, jo žymėjimas ir formulė.

   Nurodymai. 1) Čia mokiniams reikia pabrėžti, kad galima skaičiuoti stačiojo trikampio statinio, esančio prieš kampą α ir įžambinės ilgių santykį ne tik kai $\alpha = 30°, 45°, 60°$, bet ir kai kampas $0° < \alpha < 90°$. (Galima ir pačių mokinių paklausti, kokias reikšmes gali įgyti stačiojo trikampio smailusis kampas.) Galima užsiminti, kad tas kampas gali būti kiek norint mažas: 1°, 0,1°, 0,01° ir pan.
   2) Būtina įsitikinti, ar mokiniai suprato pateiktą apibrėžimą. Todėl reikėtų liepti apskaičiuoti smailiųjų kampų sinusus, pateikus konkrečius pavyzdžius. Pavyzdžiui, galima pateikti tokią užduotį: apskaičiuokite stačiojo trikampio ABC ($\angle C = 90°$) $\sin A$ ir $\sin B$, jei:
   a) $AB = \sqrt{5}$, $BC = 2$, $AC = 1$;
   b) $BC = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{3}$, $AB = \sqrt{5}$;
   c) $AB = 5$, $AC = 1$;
   d) $AC = 4$, $AB = 9$.
   Silpniausiems mokiniams galima pateikti dar ir trikampių brėžinius.
4. Pateikiamas faktas, kad stačiųjų trikampių su lygiais smailiaisiais kampais atitinkamų kampų sinusai yra lygūs.

   Nurodymai. 1) Silpniausi mokiniai įrodymo gali ir nesuprasti, bet stipresnieji turėtų gebėti pagrįsti šį teiginį.

   Duota: $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$), $\triangle A_1B_1C_1$ ($\angle C_1 = 90°$), $\angle A = \angle A_1$.
   Įrodyti: $\sin \angle A = \sin \angle A_1$.

   Įrodymas. $\triangle ACB \backsim \triangle A_1C_1B_1$ (pagal du lygius kampus). Panašiųjų trikampių kraštinės yra proporcingos, todėl jei $AB = c$, $BC = a$, tai $A_1B_1 = kc$, o $B_1C_1 = ka$ ($k > 0$). $\sin \angle A = \frac{a}{c}$, $\sin \angle A_1 = \frac{ka}{kc} = \frac{a}{c}$.
5. Pateikamos skyrelio pradžioje įrodytos lygybės: $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Nurodymai. 1) Būtų gerai, kad šias lygybes mokiniai žinotų mintinai, bet dar geriau — kad mokėtų jas išvesti (kaip tai padaryta skyrelio pradžioje).
   2) Silpnesniųjų mokinių paprašykite skaičius $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ išdėstyti didėjimo tvarka. Aišku, remiantis šiais pavyzdžiais sunku įtikinti, kad didėjant kampui didėja ir to kampo sinusas. Vadovėlyje pateiktas to teiginio įrodymas. Silpnesniems mokiniams teiginį

galima pagrįsti ir taip samprotaujant. Nagrinėkime stačiuosius trikampius ABC, kurių įžambinė AB yra fiksuoto ilgio, pavyzdžiui, lygi 5 cm. Akivaizdu, kad kai kampas A labai mažas, tai statinio BC ilgis irgi labai mažas, ir santykis $\frac{BC}{AB}$ taip pat mažas (artimas 0). Didinant kampą A, statinis BC ilgėja, tuo pačiu santykis $\frac{BC}{AB}$ didėja. Nesunku įsivaizduoti, kad kampui A artėjant prie 90° statinio BC ilgis artėja prie įžambinės AC ilgio (visada būdamas mažesnis), todėl santykis $\frac{BC}{AC}$ artėja prie 1, bet visada likdamas mažesnis už 1. Vadinasi, $0 < \sin\alpha < 1$, kai $0° < \alpha < 90°$.

6. Pateikiami trys pavyzdžiai, iliustruojantys, kaip žinant kampo didumą galima rasti to kampo sinusą, ir atvirkščiai, žinant kampo sinusą — rasti patį kampą.

Nurodymai. 1) Pirmas pavyzdys skirtas iliustruoti, kaip galima apskaičiuoti kampo $0° < \alpha < 90°$ sinusą. Tikslių sinuso reikšmių (kai $\alpha \neq 30°, 45°, 60°$ ir kai kurios kitos) nustatyti negalima. Apytikslę reikšmę galima rasti braižant, skaičiuokliu arba remiantis lentele. Būtų gerai, kad visi mokiniai tai gebėtų padaryti visais trimis būdais, bet tiksliausia reikšmė gaunama skaičiuokliu.
2) Antras pavyzdys yra analogiškas pirmam, tik čia α reikšmė imama su minutėmis arba nurodyta radianais, — o tai visiems mokiniams nėra privaloma.
3) Trečias pavyzdys skirtas iliustruoti, kaip galima nustatyti kampo didumą, kai žinoma to kampo sinuso reikšmė.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

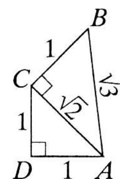
419–429 uždaviniai yra teminiai, o 430–444 — kartojimo.

Uždavinyne pateiktus uždavinius geriausia spręsti išsiaiškinus pirmus tris šio skyriaus skyrelius, t. y. smailiojo kampo sinusą, kosinusą ir tangentą.

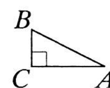
419. $\sin A = \frac{BC}{AB}$, $\sin B = \frac{AC}{AB}$, $\sin K = \frac{ML}{KL}$, $\sin L = \frac{MK}{KL}$.

420. *Nurodymai.* 1) Rezultatas priklausys nuo to, kaip tiksliai bus nubraižytas trikampis ir išmatuoti jo kraštinių ilgiai.
2) Braižant punktų c) ir d) trikampius, reikia radianus paversti laipsniais: c) $\frac{2\pi}{5}$ atitinka $\frac{2\cdot 180°}{5} = 72°$; d) $\frac{2\pi}{9}$ atitinka 40°.
3) Patikrinus gautą rezultatą skaičiuokliu, mokiniai turėtų palyginti abu rezultatus ir pažiūrėti, kiek tikslus yra rezultatas gautas matuojant. (*Pastaba.* Galima pasiūlyti apskaičiuoti reikšmės, gautos matuojant, absoliučiąją ir santykinę paklaidas.)
Atsakymas. 1) $\approx 0{,}559$; 2) $\approx 0{,}799$; 3) $\approx 0{,}951$; 4) $\approx 0{,}643$.
Pastaba. Atsakymas pateiktas apskaičiavus skaičiuokliu.

421. Punktai a)–c) braižomi analogiškai kaip teorinėje dalyje pateiktame 3 pavyzdyje. Braižome statųjį trikampį, kurio: a) vienas statinis lygus 1, o įžambinė lygi 4 ilgio vienetams ($0{,}25 = \frac{1}{4}$); b) vienas statinis lygus 3, o įžambinė lygi 4 ilgio vienetams; c) vienas statinis lygus 1, o įžambinė lygi 10 ilgio vienetų. Kampas, esantis prieš šį statinį — ieškomasis.
d) *Brėžimas*: 1) Nubraižome statųjį lygiašonį trikampį, kurio $\angle D = 90°$, $DA = DC = 1$. Tada $AC = \sqrt{2}$. 2) Iš taško C atkarpai AC iškeliame statmenį ir jame skriestuvu atidedame atkarpą $CB = 1$. 3) Nubrėžiame atkarpą AB. Kadangi $AB^2 = AC^2 + CB^2 = 2 + 1 = 3$, tai $AB = \sqrt{3}$. Kampas CAB yra ieškomasis, nes $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Kampo A didumas apytiksliai turėtų būti lygus: a) 14°; b) 49°; c) 6°; d) 35°.
Pastaba. Rezultatas gautas skaičiuojant skaičiuokliu ir apvalinant 1° tikslumu.



422. $\sin A = \frac{BC}{AB}$, $\sin B = \frac{AC}{AB}$,
$\sin^2 A + \sin^2 B = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1$.
Matome, kad įrodytoji lygybė yra ekvivalenti Pitagoro teoremai.



423. a) $\sin 23° < \sin 67°$; b) $\sin 42° > \frac{1}{2}$; c) $\sin 24° < \frac{1}{2}$.
Nurodymas. Remiamės tuo, kad didesnę kampo reikšmę atitinka didesnė sinuso reikšmė ir tuo, kad $\frac{1}{2} = \sin 30°$.

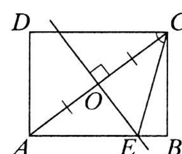
424. $\sin 23°$, $\sin 30°$, $\sin 41°$, $\sin\frac{2\pi}{7}$, $\sin\frac{2\pi}{5}$.

425. a) $\approx 0{,}342$; b) $\approx 0{,}940$; c) $\approx 0{,}586$; d) $\approx 0{,}971$.

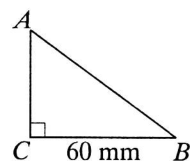
426. a) $\approx 31°$; b) $\approx 80°$; c) $\approx 36°$.

427. 2) $\sqrt{56}$ cm; 3) $\approx 56°$; 4) $\frac{25}{9}$ cm. (*Nurodymas.* Taikykite Talio teroemą.)

428. 2) $AC = 8$ cm, $\sin(\angle ACD) = \frac{4{,}8}{8} = 0{,}6$, $\angle ACD \approx 37°$;
4) $AE = EC$ (atkarpos vidurio statmens savybė); $\triangle AEO = \triangle CEO$ (pagal tris kraštines). Todėl $\angle EAO = \angle ECO$. Tačiau $\angle EAC = \angle ACD$ (vidaus priešiniai kampai, gauti dvi lygiagrečias tieses AB ir CD perkirtus tiese AC). Vadinasi, $\angle ECD = \angle ECA + \angle ACD = \angle EAC + \angle ACD =$ $= \angle ACD + \angle ACD = 2\angle ACD$.

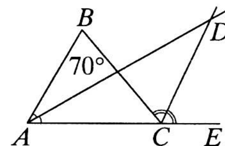


429. *I būdas.* $\sin^2 A + \sin^2 B = 1$ (žr. 422 uždavinį); $\sin^2 A = 1 - \sin^2 B = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$, $\sin A = \frac{4}{5}$. Kita vertus, $\sin A = \frac{BC}{AB}$. Tada $\frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$, $AB = \frac{5BC}{4} = \frac{5\cdot 60}{4} = 75$ (mm).

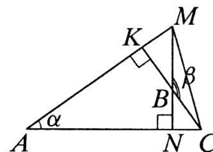


II būdas. $\sin B = \frac{AC}{AB}$, $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$, $AC = \frac{3}{5}AB$. Pagal Pitagoro teoremą $AB^2 = AC^2 + BC^2$, $AB^2 = \left(\frac{3}{5}AB\right)^2 + BC^2$, $\frac{16}{25}AB^2 = BC^2$, $\frac{4}{5}AB = BC$, $AB = \frac{5}{4}BC = \frac{5\cdot 60}{4} = 75$ (mm).
Atsakymas. 75 mm.

430. $\angle BAC + \angle ACB = 180° - 70° = 110°$ (taikome trikampio kampų sumos savybę); $\angle BCE = \angle B + \angle BAC = 70° + \angle BAC$ (taikome trikampio priekampio savybę); $\frac{1}{2}\angle BCE = 35° + \frac{1}{2}\angle BAC$. $\angle ADC = 180° - \left(\frac{1}{2}\angle BAC + \angle ACB + \frac{1}{2}\angle BCE\right) = 180° - \left(\frac{1}{2}\angle BAC + \angle ACB + 35° + \frac{1}{2}\angle BAC\right) = 180° - (\angle BAC + \angle ACB + 35°) = 180° - (110° + 35°) = 35°$.
Nurodymas. Galima mokiniams pasiūlyti ir tokį uždavinį: Trikampio ABC kampas B lygus 70°. Kampų A ir C pusiaukampinės susikerta taške D. Apskaičiuokite kampą ADC.



431. *I būdas.* Iš stačiojo trikampio ANM gauname, kad $\angle AMN = 90° - \alpha$. Iš stačiojo trikampio MKB gauname, kad $\angle KBM = 90° - \angle KMB = 90° - \angle AMN = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$. Remdamiesi gretutinių kampų savybe gauname, kad $\alpha + \beta = 180°$.
Pastaba. Tą patį gautume nagrinėdami $\triangle AKC$ ir $\triangle CNB$.
II būdas. $\angle KBN = \beta$ (kryžminiai kampai). Remiantis keturkampio kampų sumos savybe gauname: $\alpha + 90° + \beta + 90° = 360°$, $\alpha + \beta = 180°$.



432. Kadangi išorės vienašalių kampų suma lygi 180° (70° + 110° = 180°), tai $a \parallel b$. Tada $x = 180° - 145° = 35°$.

433. $8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 40\,320$.

434. a) 24; b) 120; c) $24 - 6 = 18$; d) $120 - 24 = 96$.
Pastaba. Atkreipkite mokinių dėmesį, kad pirmasis skaitmuo negali būti lygus 0.

435. a) Sprendinių nėra; b) $(-\infty; 1), (1; +\infty)$; c) $\left(-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}\right)$; d) $(0; 1)$.

436. a) 24 cm, 7 cm; b) 20 cm, 15 cm.

437. *I būdas.* Tam, kad tiesė eitų per nurodytus taškus, tų taškų koordinatės turi tenkinti tiesės lygtį $y = kx + b$. Tokiu būdu gauname lygčių sistemą:
a) $\begin{cases} -2k + b = -5, \\ 3k + b = 5, \end{cases}$ $k = 2$, $b = -1$; b) $\begin{cases} -4k + b = 7, \\ 4k + b = -1, \end{cases}$ $k = -1$, $b = 3$.
II būdas. Apskaičiuokime tiesės krypties koeficientą:
a) $k = \frac{5-(-5)}{3-(-2)} = 2$. Kadangi $y = 5$, $x = 3$, tai $5 = 2\cdot 3 + b$. Iš čia $b = -1$;
b) $k = \frac{-1-7}{4-(-4)} = -1$. Kadangi $y = -1$, $x = 4$, tai $-1 = -1\cdot 4 + b$. Iš čia $b = 3$.
Atsakymas. a) $y = 2x - 1$; b) $y = -x + 3$.

438. $\frac{1}{3}$.

439. a) 98 cm; b) 21 cm, 28 cm; c) 24,5 cm; d) 588 cm^2; e) $3\sqrt{113}$ cm, $4\sqrt{85}$ cm; f) $24\pi \approx 75{,}4$ cm; g) $\frac{25(49-12\pi)}{3\pi} \approx 30\%$; h) $588 - 144\pi \approx 136$ cm^2; i) $49 : 12\pi$.

440. a) -3; 8; b) $-3\frac{1}{3}$; 5.

441. a) 3,5; b) $-1{,}5$.

442. a) $8{,}5\cdot 10^{-4}$; b) $-7{,}5\cdot 10^{-4}$; c) $4\cdot 10^{-8}$; d) $6{,}25\cdot 10^{-2}$.

443. a) $a_n = 25n - 5$; b) 195 Lt, 295 Lt; c) šešto; vienuolikto; d) 495 Lt, 1080 Lt.

444. Maršruto laiko tarp autobusų intervalas yra atvirkščiai proporcingas autobusų skaičiui. Jei 3 autobusai važinėja kas 30 minučių, tai 5 turėtų važinėti kas 18 minučių.
Atsakymas. **B.**

6.2. Smailiojo kampo kosinusas

Šio skyrelio struktūra yra panaši į praeito skyrelio struktūrą. Jei mokiniai gerai įsisavino praeito skyrelio medžiagą, tai čia sunkumų jiems neturėtų kilti.

Pakartoti, ką vadiname stačiojo trikampio smailiojo kampo sinusu.

Išmokti:
nusakyti, ką vadiname stačiojo trikampio smailiojo kampo kosinusu;
kam lygūs kampų 30°, 45°, 60° kosinusai;
rasti smailiojo kampo kosinusą, žinant jo didumą;
rasti smailiojo kampo didumą, žinant jo sinusą;
formulę $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Šiame skyrelyje:

1. Pateikiama užduotis, siekiant, kad mokiniai savarankiškai apskaičiuotų stačiojo trikampio statinio, esančio prie kampo α, ir įžambinės ilgių santykius, kai $\alpha = 30°, 45°, 60°$.

   Nurodymai. 1) Silpnesniems mokiniams pateikite paruošiamųjų pratimų, skirtų sąvokoms statinis, esantis prieš kampą, ir statinis, esantis prie kampo, įsisavinti.

   2) Stipresniems mokiniams galima iš karto pateikti kosinuso apibrėžimą, po to skaičiuoti $\cos 30°$, $\cos 45°$, $\cos 60°$ reikšmes.

2. Analogiškai praeito skyrelio medžiagai pateikiamas kosinuso apibrėžimas, savybės ir pavyzdžiai.

3. Pateikiama pagrindinė trignometrijos tapatybė, siejanti to paties kampo sinusą ir kosinusą: $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

   Nurodymai. 1) Šios formulės išvedimas yra nesudėtingas. Vertėtų mokiniams liepti pagrįsti formulės išvedime parašytą lygybę ... $= \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1$, siekiant, kad jie nurodytų, jog $a^2 + b^2 = c^2$, todėl $\frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$.

   2) 1 pavyzdžio 5 punkte pasiūlykite mokiniams rasti korektūros klaidą: vietoj $\approx \frac{3,5}{7} = 0,7$ turi būti $\approx \frac{3,5}{5} = 0,7$.

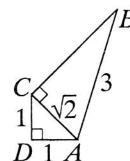
PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

445–458 uždaviniai yra teminiai, kiti — kartojimo.

445. $\cos A = \frac{AC}{AB}$, $\cos B = \frac{BC}{AB}$, $\cos K = \frac{KM}{KL}$, $\cos L = \frac{ML}{KL}$.

446. Apskaičiavę skaičiuokliu gauname:
1) $\approx 0,946$; 2) $\approx 0,342$; 3) $\approx 0,670$; 4) $\approx 0,174$.
Pastaba. Žr. 420 uždavinio nurodymą.

447. Braižome statųjį trikampį, kurio: a) vienas statinis lygus 2, o įžambinė lygi 5 ilgio vienetams; b) vienas statinis lygus 2, o įžambinė lygi 3 ilgio vienetams. Kampas, esantis prie šio statinio — ieškomasis.
c) *Brėžimas.* 1) Nubraižome statųjį lygiašonį trikampį, kurio $\angle D = 90°$, $AD = DC = 1$. Tada $AC = \sqrt{2}$. 2) Iš taško C atkarpai AC iškeliame statmenį. 3) Skriestuvu iš taško A, kaip iš centro, spinduliu lygiu 3 ilgio vienetams, brėžiame lankelį, kuris kerta statmenį taške B. Kampas CAB yra ieškomasis, nes $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.



d) Nubraižome statųjį trikampį, kurio statinių ilgiai yra 1 ir 2. Tada įžambinės ilgis lygus $\sqrt{5}$. Kampas, esantis prie statinio, kurio ilgis yra 1 — ieškomasis.

448. a) $\cos 27° > \cos 53°$; b) $\cos 61° < \frac{1}{2}$; c) $\cos 58° > \frac{1}{2}$.
Nurodymas. Remiamės tuo, kad didesnę kampo reikšmę atitinka mažesnė kosinuso reikšmė ir tuo, kad $\frac{1}{2} = \cos 60°$.

449. $\sin A = \frac{BC}{AB}$, $\cos B = \frac{BC}{AB}$. Iš šių lygybių išplaukia, kad $\sin A = \cos B$.
Kadangi $\angle B = 90° - \angle A$, tai $\cos(90° - A) = \sin A$.
Analogiškai įrodoma, kad $\sin B = \cos A$, t. y. $\sin(90° - A) = \cos A$.

450. Didėjant kampui A, kampas $(90° - A)$ mažėja, o mažėjant kampui, mažėja ir to kampo sinusas. Taigi kampui A didėjant, $\sin(90° - A)$ mažėja. Tuo pačiu mažėja ir $\cos A$.

451. a) $\sin^2 30° + \cos^2 30° = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$;
b) $\sin^2 60° + \cos^2 60° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$;
c) $\sin^2 45° + \cos^2 45° = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$.

452. a) $\sqrt{0,96} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$; b) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; c) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

453. a) $\approx 48°$; b) $\approx 15°$; c) $\approx 62°$.
Pastaba. Skaičiuoti reikėtų 1° tikslumu.

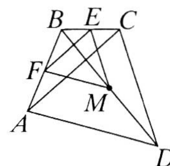
454. a) $\approx 0{,}891$; b) $\approx 0{,}530$; c) $\approx 0{,}789$; d) $\approx 0{,}273$.
Pastaba. Skaičiuodami skaičiuokliu gauname, kad $\cos 74°12' \approx 0{,}272$.

455. $\cos\frac{7\pi}{15}$, $\cos\frac{7\pi}{20}$, $\cos 60°$, $\cos 35°$, $\cos 27°$.

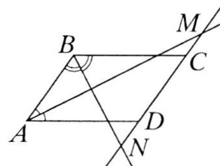
456. a) 1; b) $\sin^3\alpha$; c) $2\sin^2\alpha$; d) 1.

457. a) $\approx 0{,}724$; b) $\approx 0{,}884$; c) $\approx 0{,}841$; d) $\approx 0{,}627$.

458. *Nurodymas.* Įrodymas analogiškas praeito skyrelio 422 uždavinio įrodymui.

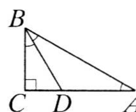


459. Pagal Talio teoremą: $\frac{BE}{BC} = \frac{BM}{BD}$, $\frac{BF}{BA} = \frac{BM}{BD}$. Iš čia $\frac{BE}{BC} = \frac{BF}{BA}$. Pagal atvirkštinę Talio teoremą gauname, kad $EF \parallel AC$.

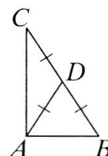


460. a) $\triangle BCN$ — lygiašonis, nes $\angle CBN = \angle ABN = \angle CNB$. Todėl $BC = CN = b$. Analogiškai $\triangle ADM$ — lygiašonis, todėl $AD = DM = b$. Tada $MD + NC = 2b$. Bet $MD = MC + CD$, $NC = ND + DC$, todėl $MD + NC = MC + CD + DN + DC = MN + DC$. Tada $MN = MD + NC - DC = 2b - a$.

b) 1) Sprendimas analogiškas a) punkto sprendimui. $MN = 2a - b$.
2) Kai $a < b$, tai galimi trys atvejai:
1) kampų A ir D pusiaukampinės AM ir DN susikerta stačiakampio viduje. Tada $MN = 2a - b$ $(b < 2a)$;
2) kampų A ir D pusiaukampinės AM ir DN susikerta stačiakampio išorėje. Tada $MN = b - 2a$ $(b > 2a)$;
3) kampų A ir D pusiaukampinės AM ir DN susikerta taške, priklausančiame kraštinei BC, t. y. taškai M ir N sutampa. Tada $MN = 0$ (kai $a = 2b$).



461. $AD = DB$, nes $\triangle ADB$ — lygiašonis; $AC = AD + DC = BD + DC$, $DC = AC - BD = AC - (AC - 1) = 1$ (cm); $DB = 2$ cm, nes DC — stačiojo trikampio DCB statinis, esantis prieš 30° kampą.
Atsakymas. 2 cm.



462. *I būdas.* Taškas D yra vienodai nutolęs nuo taškų A, B ir C. Taigi jis yra apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras. BC — to apskritimo skersmuo. Tada $\angle BAC = 90°$, nes jis yra įbrėžtas į apskritimą ir remiasi į skersmenį.

II būdas. $\triangle ADB$ — lygiašonis, $\angle BAD = \angle ABD$; $\triangle ADC$ — lygiašonis, $\angle ACD = \angle CAD$. Remiantis trikampio kampų sumos savybe gauname, kad $\angle DCA + \angle CAD + \angle DAB + \angle ABD = 180°$, $2\angle CAD + 2\angle DAB = 180°$, $\angle CAD + \angle DAB = 90°$. Taigi $\triangle ABC$ yra statusis.

463. a) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$; b) $\frac{1}{3024}$.

464. $\frac{1}{24}$.

465. a) $(-\infty; +\infty)$; b) $(-\infty; -2)$, $(1; +\infty)$; c) $[2; 4)$; d) $[6; 8)$;
e) -2, 2, $[7; 8]$; f) 1, $[2; 4]$.

466. *Pastaba.* Sąlygoje yra korektūros klaida. Turėtų būti: „... raskite parabolės $y = ax^2 + bx + c$ koeficientus a, b ir c“.
Atsakymas. a) $a = -1$, $b = 4$, $c = -4$; b) $a = \frac{1}{4}$, $b = 0$, $c = 1$; c) $a = -1$, $b = -4$, $c = 0$; d) $a = \frac{1}{2}$, $b = -3$, $c = 1\frac{1}{2}$.

467. *Pastaba.* Atkreipkite moksleivių dėmesį, jog grąžintina suma kasmet padidėja tiek pat litų. Vadinasi, yra sutartos paprastosios palūkanos.
a) 8000 Lt; b) 9%; c) $P_t = 720t$, $t \leqslant 3$; d) $K(t) = 8000 \cdot 1{,}09^t$, $t \leqslant 3$;
e) $K(m) = 8000 + 60m$, $m \leqslant 36$; f) $K(d) = 8000 + 2d$, $d \leqslant 1080$.

468. Jei pirmojo ritinio pagrindo spindulys yra R, o aukštis H, tai antrojo ritinio pagrindo spindulys yra $2R$, o aukštis $4H$. Tada $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi R^2 H}{\pi \cdot (2R)^2 \cdot 4H} = \frac{1}{16}$.

469. a) $\frac{b^3}{8a^6}$; b) $\frac{81y^8}{x^{12}}$; c) $\frac{x-y}{2(x+y)}$; d) $\frac{x^2+2x+2}{2x(x^2-1)}$.

470. *Nurodymas.* Abi lygties puses daugindami iš bendrojo trupmenų vardiklio galime pakeisti lygtį jai ekvivalenčia lygtimi su sveikaisiais koeficientais. Tai gerokai palengvins skaičiavimus.
Atsakymas. a) (5; 8); b) (3; 2).

471. a) $x = -1$, $x = 3$; b) 4; c) funkcijos reikšmės didėja, kai $x < 1$; mažėja, kai $x > 1$; d) funkcijos reikšmės yra neneigiamos, kai $-1 \leqslant x \leqslant 3$; neteigiamos, kai $x \leqslant -1$ ir $x \geqslant 3$.

472. *Nurodymas.* Patogu taikyti aritmetinės progresijos n-tojo nario ir pirmųjų n narių sumos formules ($a_1 = 800$, $d = 5$).
Atsakymas. a) $a_n = 795 + 5n$; b) 845 Lt, 870 Lt, 920 Lt, 945 Lt; c) 19; 36; d) 15 165 Lt, 23 355 Lt.

473. a) Naujo lydinio viename grame yra $\frac{906}{1000}$ gramų gryno aukso. Tada 25-iuose gramuose bus $\frac{906}{1000} \cdot 25 = 22{,}65$ (g) gryno aukso; arba:

$$\begin{array}{l} 25\,\text{g} — 1000‰, \\ x\,\text{g} — 906‰, \end{array} \quad x = 22{,}65\,\text{g}.$$

b) Sakykime, kad 950-os prabos lydinio masė yra x gramų, o 800-os prabos — y gramų. Tada 950-os prabos lydinyje yra $\frac{950x}{1000}$ gramų, o 800-os prabos lydinyje — $\frac{800y}{1000}$ gramų gryno aukso. Sprendžiame lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \frac{950x}{1000} + \frac{800y}{1000} + 2 = \frac{906 \cdot 25}{1000}, \\ x + y + 2 = 25, \end{cases} \quad x = 15,\ y = 8.$$

Atsakymas. a) 22,65 g; b) 15 g, 8 g.

474. Taip gali būti sausio 1 dieną, jeigu kalbantysis yra gimęs gruodžio 31 d. Tada užvakar (gruodžio 30 d.) jam dar buvo 14, vakar (gruodžio 31 d.) jam buvo 15, šiemet gruodžio 31 d. jam bus 16, o kitais metais gruodžio 31 d. jam bus 17 metų.

6.3. Smailiojo kampo tangentas

Šio skyrelio medžiaga analogiška praeito skyrelio medžiagai, todėl mokiniams neturėtų būti sunku ją įsisavinti.
Pastaba. Esant laiko galima analogiškai nagrinėti ir smailiojo kampo kotangentą, nors tai ir nėra numatyta programoje.

Pakartoti:
ką vadiname stačiojo trikampio smailiojo kampo sinusu;
ką vadiname stačiojo trikampio smailiojo kampo kosinusu.

Išmokti:
nusakyti, ką vadiname stačiojo trikampio smailiojo kampo tangentu;
kam lygūs kampų 30°, 45°, 60° tangentai;
rasti smailiojo kampo tangentą, žinant jo didumą;
rasti smailiojo kampo didumą, žinant jo tangentą;
formulę $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}$.

Šiame skyrelyje:

1. Žr. praeito skyrelio analogišką punktą.
2. Žr. praeito skyrelio analogišką punktą.
3. Pateikiama tapatybė, siejanti to paties kampo sinusą, kosinusą ir tangentą: $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}$.

   Nurodymas. Mokiniams būna lengviau įrodyti formulę iš kito galo, t. y. $\frac{\sin A}{\cos A} = \operatorname{tg} A$, todėl įrodymą galima apsukti.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

475–488 uždaviniai yra teminiai, kiti — kartojimo.

475. $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$, $\operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC}$, $\operatorname{tg} K = \frac{ML}{KM}$, $\operatorname{tg} L = \frac{MK}{ML}$.

476. a) $\approx 0{,}364$; b) $\approx 2{,}747$; c) $\approx 0{,}839$; d) $\approx 9{,}514$.

477. Braižome statųjį trikampį, kurio statiniai yra: a) 49 ir 100 ilgio vienetų (pvz. milimetrų); b) 3 ir 5 ilgio vienetų; c) 4 ir 1 ilgio vienetų; d) 4 ir $\sqrt{5}$ ilgio vienetų (atkarpą $\sqrt{5}$ braižėme praeitame skyrelyje 447 d) uždavinyje). Kampas, esantis prieš statinį, kurio ilgis yra: a) 49; b) 3; c) 4; d) 4, yra ieškomasis. Šio kampo didumas yra: a) $\approx 26°$; b) $\approx 31°$; c) $\approx 76°$; d) $\approx 61°$.

478. a) $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$; b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$;
c) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

479. a) 1) $\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{\cos A}{\sin A}$; 2) $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{ctg} A = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$;
b) $\operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 45° = 1$, $\operatorname{ctg} 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

480. *Nurodymas.* Reikia patikrinti, ar $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.
Atsakymas. a) Taip; b) ne; c) taip; d) ne.

481. *Nurodymas.* Pakartokite formules: $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

482. a) 2; b) -5; c) -24.

483. a) $\frac{2}{5}$; b) $\frac{13}{10}$.

484. a) $\approx 0{,}700$; b) $\approx 0{,}327$.

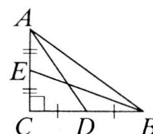
485. a) $\approx 15°$; b) $\approx 41°$; c) $\approx 85°$.

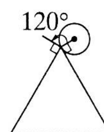
486. Kadangi didėjant kampui α, $\sin\alpha$ didėja, o $\cos\alpha$ mažėja, tai trupmenos $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ reikšmė didėja. Vadinasi, $\operatorname{tg}\alpha$ didėja.

487. a) $\approx 1{,}024$; b) $\approx 1{,}984$.

488. a) $\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha - \cos^3\alpha} = \frac{\sin\alpha \cdot \sin^2\alpha}{\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha$;
b) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha(\operatorname{ctg}^2\alpha - 1)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = 1$;
c) $\frac{2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos\alpha}{1 - 3\sin\alpha + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\cos\alpha(2\sin\alpha - 3)}{2\sin^2\alpha - 3\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha(2\sin\alpha - 3)}{\sin\alpha(2\sin\alpha - 3)} = \operatorname{ctg}\alpha$.

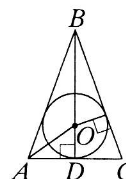
489. Sakykime, kad $AC = 2x$, $BC = 2y$. Sprendžiame lygčių sistemą:
$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 100, \\ x^2 + 4y^2 = 160. \end{cases}$ Sudėję abi lygtis gausime: $5x^2 + 5y^2 = 260$, $x^2 + y^2 = 52$.
Kadangi $AB^2 = 4x^2 + 4y^2$, tai ieškoti x ir y nereikia:
$AB^2 = 4 \cdot 52$, $AB = 2\sqrt{52} = 4\sqrt{13}$ (cm).





490. Riedėdamas trikampio kraštinėmis apskritimas apsisuks 3 kartus. Prie kiekvienos trikampio viršūnės apskritimas „permetamas“ 120° kampu. Prie visų trijų viršūnių jis padarys pilną apsisukimą. Taigi iš viso apskritimas apsisuks 4 kartus.

491. 200 cm^2. *Nurodymas.* Taikykite apibrėžtinio keturkampio ir statinio, esančio prieš 30° kampą, savybes.



492. Į trikampį įbrėžto apskritimo centras yra trikampio pusiaukampinių susikirtimo taškas. Kadangi $\triangle ABC$ yra lygiašonis, tai BD — pusiaukampinė. AO — $\triangle ADB$ pusiaukampinė, $AD = 3$ cm. Trikampiui BAD taikome pusiaukampinės savybę: $\frac{BO}{OD} = \frac{AB}{AD}$. Iš čia $\frac{BO}{OD} = \frac{7}{3}$.

493. 40 cm. *Nurodymas.* Remkitės apskritimo liestinių, išeinančių iš vieno taško, savybe.

494. 135.

495. Duomenys yra neigiamai koreliuoti.

496. a) $-1, 0, 1, 2, 3$; b) $-4, -3, -2, -1, 0, 1$.

497. a) 14 cm, 48 cm, 336 cm^2; b) 30 cm, 40 cm, 600 cm^2.

498. Naudingiau padėti į banką, kuris skaičiuoja 13% metinių sudėtinių palūkanų kas pusmetį.

499. Prekės antkainis yra: a) $33 - 25 = 8$ (Lt); b) $34 - 25 = 9$ (Lt).
PVM yra: a) $\frac{33 \cdot 18}{118} \approx 5{,}03$ (Lt); b) $\frac{34 \cdot 18}{118} \approx 5{,}19$ (Lt).
Kitos išlaidos yra: $8 \cdot 0{,}25 = 2$ (Lt); b) $9 \cdot 0{,}25 = 2{,}25$ (Lt).
Pelnas yra: a) $8 - 5{,}03 - 2 = 0{,}97$ (Lt); b) $9 - 5{,}19 - 2{,}25 = 1{,}56$ (Lt).
Grynasis pelnas yra: a) $0{,}97 \cdot 0{,}76 \approx 0{,}74$ (Lt); b) $1{,}56 \cdot 0{,}76 \approx 1{,}19$ (Lt).

500. a) $\frac{1}{2}$ ir 1; b) $-1\frac{4}{7}$ ir 2.

501. 42.

502. a) (8; 2,5); b) (3; 1).

503. Trupmenos reikšmė lygi nuliui, kai:
a) $x = 4$; b) $x = 6$; c) $x = 1$; d) tokių x reikšmių nėra.
a) Trupmena visada turi prasmę. Trupmena neturi prasmės, kai: b) $x = -1$; c) $x = -6$, $x = 2$; d) $x = -3$, $x = 3$.

504. a) $a_n = 235 + 15n$; b) 310 Lt, 400 Lt; c) balandžio mėn., rugpjūčio mėn.; d) 1725 Lt, 3990 Lt.

505. a) -20; b) -5832.

506. I dienos figūra sudėliota iš 4 degtukų;
II dienos figūra sudėliota iš 12 degtukų (+ 8 degtukai);
III dienos figūra sudėliota iš 24 degtukų (+ 12 degtukų);
IV dienos figūra bus sudėliota iš 40 degtukų (+ 16 degtukų);
V dienos figūra bus sudėliota iš 60 degtukų (+ 20 degtukų); ...
Pastebėjus dėsningumą, patogu sudaryti lentelę:

Diena	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
Naujų degtukų skaičius	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44

Atsakymas. **C.**

6.4. Stačiųjų trikampių sprendimas

Tai pats svarbiausias šio skyriaus skyrelis. Reikia siekti, kad visi mokiniai gabėtų spręsti uždavinius, analogiškus vadovėlyje pateiktiems pavyzdžiams.

Pakartoti:

Pitagoro teoremą;
kam lygi stačiojo trikampio smailiųjų kampų suma;
stačiojo trikampio smailiojo kampo sinuso, kosinuso ir tangento apibrėžimus.

Išmokti spręsti stačiuosius trikampius.

Šiame skyrelyje:

1. Nusakoma, kas vadinama stačiųjų trikampių sprendimu.

Pastaba. Terminas *trikampių sprendimas* nėra nepriekaištingas, bet prigijęs.

2. Pateikiami keturi pavyzdžiai, iliustruojantys svarbiausius šio skyriaus uždavinius.

Pastaba. Stačiųjų trikampių sprendimo uždavinių atsakymai (kraštinių ilgiai ir kampų didumai) dažnai būna iracionalūs skaičiai (su šaknimis ir trigonometrinėmis funkcijomis). Tokie reiškiniai praktiškai nėra patogūs, todėl skaičiuojant gautas tikslias iracionalias reikšmes patogu keisti dešimtainiais skaičiais (apvalinti). Nuo tarpinių apvalinimų skaičiaus ir nuo apvalinimo tikslumo priklauso, kokia paklaida gaunama atsakyme. Todėl atsakymai, skaičiuojant skirtingai, gali skirtis.

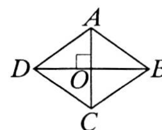
PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai yra 507–525 uždaviniai, o kiti — kartojimo.
Pastabos. 1) Spręsdami stačiuosius trikampius laikysime, kad $\angle C = 90°$.
2) Skaičiuojame imdami trigonometrinių funkcijų reikšmes tūkstantųjų tikslumu.

507. a) $\angle B = 72°$, $BC = 10\,\mathrm{tg}\,18° \approx 3{,}3$, $AB = \frac{10}{\cos 18°} \approx 10{,}5$;
b) $\angle B = 72°$, $AC = \frac{10}{\mathrm{tg}\,18°} \approx 30{,}8$, $AB = \frac{10}{\sin 18°} \approx 32{,}4$;
c) $\angle B = 28°$, $BC = 12\sin 62° \approx 10{,}6$, $AC = 12\cos 62° \approx 5{,}6$;
d) $\angle A = 65°$, $BC = \frac{4{,}5}{\mathrm{tg}\,25°} \approx 9{,}7$, $AB = \frac{4{,}5}{\sin 25°} \approx 10{,}6$;
e) $\angle A = 34°$, $AC = 6\,\mathrm{tg}\,56° \approx 8{,}9$, $AB = \frac{6}{\cos 56°} \approx 10{,}7$;
f) $\angle A = 10°$, $AC = 14\sin 80° \approx 13{,}8$, $BC = 14\cos 80° \approx 2{,}4$;
g) $b = \sqrt{42^2 - 25^2} \approx 33{,}7$, $\sin A = \frac{25}{42} \approx 0{,}595$, $\angle A \approx 36{,}5°$, t. y. $36°30'$; $\angle B \approx 53°30'$;
h) $c = \sqrt{12^2 + 32^2} \approx 34{,}2$, $\mathrm{tg}\,A = \frac{12}{32} = 0{,}375$, $\angle A \approx 20°30'$, $\angle B \approx 69°30'$ (arba $\angle A \approx 21°$, $\angle B = 69°$).

508. a) $x = 2\,\mathrm{tg}\,30° = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}15$;
b) $x = \frac{5}{\cos 65°} \cdot \mathrm{tg}\,25° \approx 5{,}5$;
c) $AD = 2\,\mathrm{tg}\,50° \approx 2{,}4$; $x \approx \sqrt{4^2 - 2{,}4^2} \approx 3{,}2$;
d) $BC = \frac{5}{\mathrm{tg}\,35°} \approx 7{,}1$; $x \approx 7{,}1 - 4 = 3{,}1$;
e) iš viršūnės A nubrėžtą trikampio ABC aukštinę pažymėkime AD. Tada $BD = 3\sin 20° \approx 1$; $x \approx 1 + 5 = 6$;
f) iš viršūnės A nubrėžkime aukštinę AD. Tada $BD = \frac{x}{2}$; $\frac{x}{2} = 5\cos 65°$, $x = 10\cos 65° \approx 4{,}2$;
g) iš viršūnės C nubrėžkime aukštinę CD. Tada $CD = 6\sin 65°$; $\angle B = 75°$, $x = \frac{CD}{\sin 75°} = \frac{6\sin 65°}{\sin 75°} \approx 5{,}6$.

509. $\mathrm{tg}\,(\angle BAO) = \frac{7}{5} = 1{,}4$; $\angle BAO \approx 54°$, $\angle BAD = 2\angle BAO \approx 2 \cdot 54° = 108°$, $\angle ABC \approx 72°$; $AB = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$ (cm), $P_{ABCD} = 4\sqrt{74} \approx 34{,}4$ cm.



510. Ilgesnysis trapecijos pagrindas lygus $\frac{1{,}2}{\mathrm{tg}\,50°} + 2 + \frac{1{,}2}{\mathrm{tg}\,35°} \approx 4{,}7$ (dm). Tada $S \approx \frac{2+4{,}7}{2} \cdot 1{,}2 = 4{,}02$ (dm^2).

511. $\sin A = \frac{20}{1500} = 0{,}01(3)$, t. y. $\approx 1{,}3\%$; $\angle A \approx 0{,}74°$, t. y. maždaug $44'$.

512. a) $AD = AC - 10 = 20\,\mathrm{tg}\,42° - 10 \approx 8$ (m);
b) $AB = \frac{EB}{\sin 60°}$, $EB = 30\sin 50°$; $AB = \frac{30\sin 50°}{\sin 60°} \approx 26{,}5$ (m).

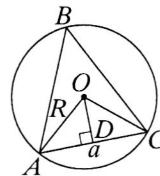
513. a) $AC = 60\,\mathrm{tg}\,39° \approx 48{,}6$ (m); $BD = 60\,\mathrm{tg}\,35° \approx 42$ (m); $AC - BD \approx 48{,}6 - 42 = 6{,}6$ (m); $AB \approx \sqrt{6{,}6^2 + 60^2} \approx 60{,}4$ (m);
b) $\triangle ACO \backsim \triangle MEO$, $\frac{OA}{OM} = \frac{OC}{OE} = \frac{30}{10} = \frac{3}{1}$; $\triangle BDO \backsim \triangle NFO$, $\frac{OB}{ON} = \frac{OD}{OF} = \frac{15}{5} = \frac{3}{1}$. Taigi $\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON}$. Remiantis teorema, atvirkštine Talio teoremai bei Talio teoremos išvada, gauname: $\frac{AB}{MN} = \frac{3}{1}$, $AB = 3MN = 3 \cdot 20 = 60$ (m).

514. *Pastaba.* Sąlygoje nepasakyta, kad terasos šlaitai yra lygiagretūs. Su mokiniais reikėtų pasiaiškinti, kad kiekvieno šlaito sudaromas kampas yra 43°.
$h = 3 \cdot 2{,}5 \sin 43° \approx 5{,}1$ (m).

515. 1) Pastebime, kad atramų AB ir LM; CD ir JK; EF ir GH aukščiai yra vienodi. Tada
$AB = LM = 20 + 45 \operatorname{tg} 6° \approx 24{,}73$ (m);
$CD = JK = 20 + 2 \cdot 45 \operatorname{tg} 6° \approx 29{,}45$ (m);
$EF = GH = 20 + 3 \cdot 45 \operatorname{tg} 6° \approx 34{,}18$ (m).
2) Aukščiausio tilto taško nuotolis iki upės dugno lygus:
$20 + 3{,}5 \cdot 45 \operatorname{tg} 6° \approx 36{,}54$ (m).

516. *Pastaba.* Spręskite pagal 160 puslapyje pateiktą nurodymą.
Atsakymas. $\approx 45{,}7$ m.

517. $\angle ABC = \alpha$ (duota), $\angle AOC = 2\alpha$, $\angle AOD = \alpha$; $\frac{a}{2} : R = \sin\alpha$, $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$.
Pastaba. Ši formulė dažnai palengvina uždavinių sprendimą. Beje, parašę ją kaip $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, gauname vadinamąją sinusų teoremą:
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} (= 2R)$.



518. $\angle BAC \approx 38°$. *Nurodymas.* Remkitės apskritimo liestinės ir iš vieno taško išeinančių apskritimo liestinių savybėmis.

519. Tegul $AC = x$. Tada $BC = 90 - x$. Tegul $\angle NCA = \angle MCB = \alpha$. Iš stačiojo trikampio NAC: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{25}{x}$. Iš stačiojo trikampio MBC: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{35}{90-x}$. Tada $\frac{25}{x} = \frac{35}{90-x}$, $x = 37{,}5$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{25}{37{,}5} \approx 0{,}667$ ir $\alpha \approx 34°$.

520. 2) $\operatorname{tg}(\angle ACD) = \operatorname{tg}(\angle CAB) = \frac{5{,}4}{7{,}2} = 0{,}75$; $\angle ACD \approx 37°$.
3) *Pastaba.* Sąlygoje tiksliau būtų rašyti taip: „... susikirtimo su *kraštinės* BC *tęsiniu* tašką pažymėkite raide E“.
4) *Nurodymas.* Remkitės atkarpos vidurio statmens savybe.
5) $\angle AEC \approx 74°$.

521. $\angle CBM = 30°$, $CM = NB = 4 \operatorname{tg} 30° \approx 2{,}3$ (cm); $NA \approx 11{,}3$ cm.

522. *Nurodymai.* 1) Sprendžiant tokius uždavinius, kaip 522–525, mokiniams dažnai kyla sunkumų nurodant kampą tarp tiesės ir plokštumos. Neretai painiojama ir prizmės įstrižainė su jos sienos įstrižaine. Todėl būtina pasidaryti brėžinį ir gerai išsiaiškinti uždavinio sąlygą.
2) Dirbant su silpnesne klase šių uždavinių galima visai nespręsti.
Atsakymas. 1) $V = \frac{H^3}{2\operatorname{tg}^2\alpha}$; $S_{\text{šon}} = \frac{4H^2}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\sqrt{2}H^2}{\operatorname{tg}\alpha}$; 2) $V \approx 811{,}2\,\text{dm}^3$; $S_{\text{šon}} \approx 528{,}3\,\text{dm}^2$.

523. 1) $V = \frac{c^3}{2} \sin^2\alpha \cos\alpha \operatorname{tg}\beta$; 2) $\approx 2520{,}8\,\text{cm}^3$.

524. a) 1) $V = \frac{\sqrt{2}}{6} a^3 \operatorname{tg}\alpha$; 2) $\approx 22{,}4\,\text{dm}^3$; b) 1) $\frac{a^3}{12} \operatorname{tg}\alpha$; 2) $\approx 109{,}8\,\text{dm}^3$.

525. 1) $V = \frac{4}{3} b^3 \sin\alpha \cos^2\alpha$; $S_{\text{šon}} = 4b^2 \cos\alpha$;
2) $V \approx 2794{,}8\,\text{dm}^3$; $S_{\text{šon}} \approx 946{,}5\,\text{dm}^2$.

526. a) $30 \cdot 29 = 870$; b) $\frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4060$.

527. a) $\frac{n(n-1)}{2} = 10$, $n = -4$ (netinka), $n = 5$; b) 7; c) 8; d) 11.

528. a) 1, 2, 3, 4; b) −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2.

529. a) (0; 0), (4,8; −2,4); b) (1; −2), $\left(7\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

530. a) (−5; −6); b) (1; −2).

531. b) Reiškinys $4\sqrt{x}$ — tai perimetras kvadrato, kurio kraštinės ilgis yra $\sqrt{x}$;
c) $x = 16$; d) $x = 2$.

532. a) $a_1 = -7$, $d = 3$, $a_{20} = 50$; b) $a_1 = 2$, $d = -6$, $a_{20} = -112$.

533. Akcijos kursas nominaliosios vertės atžvilgiu yra:
a) $\frac{(25-23) \cdot 100\%}{25} = 8\%$ mažesnis; b) $\frac{(25-23{,}5) \cdot 100\%}{25} = 6\%$ mažesnis;
c) $\frac{(26{,}5-25) \cdot 100\%}{25} = 6\%$ didesnis; d) $\frac{(28{,}5-25) \cdot 100\%}{25} = 14\%$ didesnis.

534. a) $(384\,200 - 3125\pi)\,\text{mm}^3$; b) $(37\,800 + 187{,}5\pi)\,\text{mm}^2$.

535. 18 km/h.

536. $25 : 5^3 = \frac{1}{5}$; $\frac{1}{64} \cdot \left(2^{-4}\right)^{-1} = \frac{1}{4}$;
a) $\frac{9}{20}$; b) $-\frac{1}{20}$; c) $\frac{1}{20}$; d) $\frac{4}{5}$; e) $\frac{1}{400}$; f) $-\frac{9}{400}$; g) -9.

537. a) Sakykime, kad stalus reikia parduoti po x Lt. Tada įplaukos už parduotus 160 stalų yra $160x$ Lt, o bendrosios išlaidos šiems stalams pagaminti yra $12\,000 + 300 \cdot 160 = 60\,000$ (Lt). Sprendžiame lygtį: $160x = 60\,000$, $x = 375$ Lt;
b) 380 Lt; c) 400 Lt; d) 420 Lt.

538. $127°30'$. *Nurodymas.* Nuo 19 val. iki 19^{15} val. minutinė rodyklė pasisuka $90°$ kampu, o valandinė — dvylika kartų mažesniu kampu.

539. Jeigu laikiusių egzaminą dešimtokų buvo x, tai vienas dešimtokas sudaro $\frac{100}{x}\%$. Kadangi neišlaikyti egzamino galėjo mažiausiai 1 mokinys, tai

$$\frac{100}{x} < 7, \quad x > \frac{100}{7}, \quad x \geqslant 15.$$

Pastaba. Jeigu sunkoka suvokti, kodėl reikia imti 1 mokinį, samprotauti galima taip. Sakykime, kad neišlaikė egzamino k mokinių. Jie sudaro $k \cdot \frac{100}{x}\%$. Iš sąlygos

$$k \cdot \frac{100}{x} < 7, \quad x > \frac{100k}{7}.$$

Mažiausias galimas egzaminą laikiusių skaičius yra skaičiaus $\frac{100k}{7}$ sveikoji dalis. Tas skaičius tuo mažesnis, kuo mažesnis k, taigi reikia imti $k = 1$.

7. TRIKAMPIŲ SPRENDIMAS

Pagrindinis šio skyriaus tikslas — išmokyti apskaičiuoti *bet kokio* trikampio elementus (kraštinių ilgius ir kampų didumus), kai žinomi trys jo elementai, iš kurių bent vienas — kraštinės ilgis. Tam skirtas trečiasis šio skyriaus skyrelis. Pirmieji du skyreliai skirti pasirengti spręsti bet kokius trikampius:

- pirmajame skyrelyje mokoma apskaičiuoti kampo α trigonometrines funkcijas, kai $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$;
- antrajame — įrodomos lygybės, siejančios trikampio kraštinių ilgius ir kampų sinusus (sinusų teorema) bei kampų kosinusus (kosinusų teorema).

Remiantis sinusų ir kosinusų teoremomis ir yra sprendžiami bet kokie trikampiai.

Ketvirtasis, neprivalomas skyrelis skirtas rimtesniam negu ankstesnėse klasėse apskritimo ilgio ir skritulio ploto formulių pagrindimui.

Nurodymai. 1) Bukojo kampo trigonometrinių funkcijų apibrėžimas silpniems mokiniams gali būti sunkiau suvokiamas negu smailiojo kampo, nes čia nesiremiama konkrečiu trikampiu. Silpniems mokiniams pakanka tik pasakyti, kad skaičiuoti galima ne tik smailiųjų, bet ir bukųjų kampų trigonometrines funkcijas, ir išmokyti tai padaryti skaičiuokliu ir naudojantis lentelėmis.

2) Svarbiausi yra 2 ir 3 skyreliai.

Minimalus lygmuo:

1. Gebėti skaičiuokliu ar iš lentelių rasti $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ($\alpha \neq 90°$) reikšmes, kai $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.
2. Spręsti bet kokius trikampius.

Pagrindinis lygmuo:

3. Gebėti žodžiais nusakyti sinusų ir kosinusų teoremas.
4. Mokėti apskaičiuoti trikampio ir lygiagretainio plotą, kai žinomos dvi kraštinės ir kampas tarp jų.
5. Spręsti uždavinius, susijusius su lygiagretainio įstrižainių ir kraštinių ilgių kvadratų sąryšiu.
6. Žinoti redukcijos formules ir gebėti jomis remtis skaičiuojant bukųjų kampų trigonometrinių funkcijų reikšmes bei sprendžiant uždavinius.

Aukštesnis lygmuo:

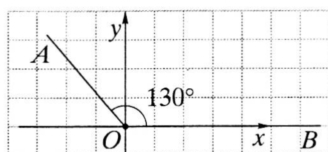
7. Mokėti, remiantis pusapskritimiu, nusakyti kampų nuo 0° iki 180° sinusą, kosinusą ir tangentą.
8. Žinoti ir mokėti įrodyti:
   - redukcijos formules,
   - sinusų teoremą,
   - kosinusų teoremą,
   - formulę $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C$,
   - faktą, kad lygiagretainio įstrižainių kvadratų suma lygi jo kraštinių kvadratų sumai.
9. Gebėti, remiantis formulėmis, apskaičiuoti į spindulio R apskritimą įbrėžto ir apie jį apibrėžto taisyklingųjų n-kampių perimetrus ir plotus.
10. Suprasti, kaip įrodomos apskritimo ilgio ir skritulio ploto formulės.

7.1. Kampų nuo 0° iki 180° trigonometrinės funkcijos

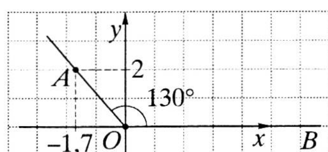
Šio skyrelio pagrindinis tikslas — parodyti, kaip galima apskaičiuoti $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$, kai $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$. Šio skyrelio teorinę medžiagą suvokti gali būti sunku net ir geriems mokiniams. Bet kokio kampo trigonometrinės funkcijos bus nagrinėjamos 11 klasėje (tiek išplėstiniame, tiek bendrajame kurse). Todėl 10 klasėje nėra būtina pasiekti, kad visi suprastų, kaip apibrėžiamos kampų nuo 0° iki 180° trigonometrinės funkcijos. Daugeliui mokinių pakaktų konkrečiais pavyzdžiais pademonstruoti, kaip tai galima padaryti.

Pavyzdžiui, apskaičiuokime 130° kampo sinusą, kosinusą ir tangentą.

1. Koordinačių plokštumoje nubraižykime $\angle AOB = 130°$ taip, kad jo viršūnė O sutaptų su koordinačių pradžios tašku, kraštinė OB sutaptų su Ox ašimi, o kraštinė OA būtų II ketvirtyje.



2. Kraštinėje OA paimkime tašką, pvz., A ir raskime jo koordinates.

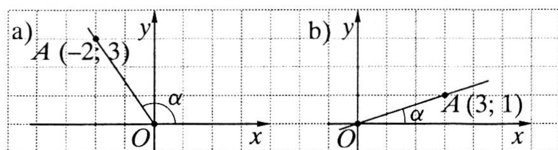


Taško A koordinatė x yra $\approx -1{,}7$, o koordinatė $y \approx 2$.

3. Apskaičiuojame OA ilgį:
$OA^2 = 2^2 + |-1{,}7|^2$, $OA \approx 2{,}6$.

4. $\sin 130° = \frac{y}{OA} \approx \frac{2}{2.6} \approx 0{,}77$,
$\cos 130° = \frac{x}{OA} \approx \frac{-1.7}{2.6} \approx -0{,}65$,
$\operatorname{tg} 130° = \frac{y}{x} \approx \frac{2}{-1.7} \approx -1{,}18$.

Toliau galima pasiūlyti mokiniams remiantis brėžiniais apskaičiuoti pavaizduotų kampų α trigonometrinių funkcijų reikšmes:



Apskritai į šio skyrelio teorinę medžiagą su silpnesniais mokiniais galima ir nesigilinti — pakanka jiems pasakyti, kad kampų nuo 0° iki 180° trigonometrinių funkcijų reikšmes galima apskaičiuoti su skaičiuokliu. Tiems, kas skaičiuoklių neturi, teks remtis lentelėmis. Beje, vadovėlio gale lentelė pateikta tik kampams nuo 0° iki 90°. Todėl vertėtų pasiūlyti silpnesniems mokiniams pasipildyti lentelę iki 180°. Nors tai ilgas bei kruopštumo reikalaujantis užsiėmimas, bet lentelės pildymas padės įsiminti redukcijos formules: $\sin(180°-\alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Nagrinėjant šio skyrelio teorinę medžiagą mokiniams gali kilti natūralus klausimas — o kam viso to reikia. Todėl prieš pradedant nagrinėti šią temą reikėtų paaiškinti mokiniams, kad praeitame skyriuje buvo mokoma spręsti stačiuosius trikampius — tam reikėjo smailiųjų kampų trigonometrinių funkcijų reikšmių, o šiame skyriuje bus mokoma spręsti bukuosius trikampius, todėl reikės kampų nuo 90° iki 180° trigonometrinių funkcijų reikšmių.

Pakartoti:

smailiojo kampo trigonometrinių funkcijų reikšmių radimą skaičiuokliu ir remiantis lentelėmis;
formules: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Išmokti:

apskaičiuoti kampų nuo 0° iki 180° sin, cos ir tg reikšmes;
redukcijos formules:
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$,
$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$,
$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Šiame skyrelyje:

1. Aiškinama, kaip galima nusakyti $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, kai $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.
2. Parodoma, kad formulė $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ yra teisinga ir bukiesiems kampams.
3. Pateikiamos ir įrodomos redukcijos formulės.

540–551 — teminiai uždaviniai, kiti — kartojimo. 1–7

540. a) $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$; $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ arba $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$. Kadangi $90° < \alpha < 180°$, t. y. argumentas α priklauso II ketvirčiui, o kosinusas II ketvirtyje yra neigiamas, tai $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$. Tada $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$;
b) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$; c) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

541. a) $\sin 100° \approx 0{,}985$, $\cos 100° \approx -0{,}174$, $\operatorname{tg} 100° \approx -5{,}671$;
b) $\sin 160° \approx 0{,}342$, $\cos 160° \approx -0{,}940$, $\operatorname{tg} 160° \approx -0{,}364$;
c) $\sin 175° \approx 0{,}087$, $\cos 175° \approx -0{,}996$, $\operatorname{tg} 175° \approx -0{,}087$.

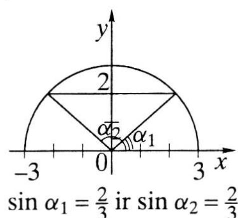
Tai pats svarbiausias šio skyrelio uždavinys. Tokių pratimų pateikite daugiau.

542. a) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$;
b) $\operatorname{ctg} 90° = 0$; kai $\alpha = 0°$ ir $\alpha = 180°$, tai $y = 0$ ir kotangentas yra neapibrėžtas;
c) $\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = \frac{\cos(180°-\alpha)}{\sin(180°-\alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha$.

543. a) $\approx 135°$; b) $\approx 145°$; c) $\approx 166°$.

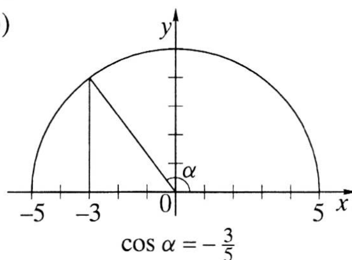
544. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{5}{2}$; c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; d) $\frac{1}{2}$.

545. a)



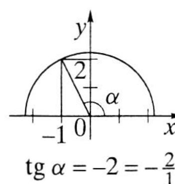
$\sin\alpha_1 = \frac{2}{3}$ ir $\sin\alpha_2 = \frac{2}{3}$

b)



$\cos\alpha = -\frac{3}{5}$

c)



$\operatorname{tg}\alpha = -2 = -\frac{2}{1}$

d) $\operatorname{ctg}\alpha = -0{,}5$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -0{,}5$, $\operatorname{tg}\alpha = -2$. Taigi brėžinys bus toks pat kaip c) punkte.

546. a) < 0; b) > 0; c) > 0; d) < 0.

547. a) $2\cos\alpha$; b) $2\sin\alpha$.

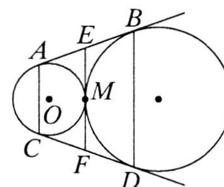
548. $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$.

549. a) $\frac{17}{31}$; b) -5; c) $\frac{21}{25}$.

550. *Pastaba.* Sąlygoje b) punkte yra klaida. Turėtų būti: „... $+\cos^2\frac{9\pi}{10}$“.
Atsakymas. a) 0; b) 2.
Nurodymas. $\cos\frac{6\pi}{10} = \cos\left(\pi - \frac{4\pi}{10}\right)$, $\cos\frac{9\pi}{10} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right)$, $\cos^2\frac{4\pi}{10} = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right)$.

551. a) 1; b) 1; c) $\sin^2\alpha$.

552. Per lietimosi tašką M nubrėžkime abiem apskritimams bendrą liestinę, kuri liestinę AB kerta taške E, o liestinę CD — taške F. Pagal liestinių, išeinančių iš vieno taško, savybę gauname, kad $AE = EM = EB$ ir $CF = FM = FD$. Vadinasi, EF — trapecijos $ABDC$ vidurinė linija.
$AB = AE + EB = 2EM$, $CD = CF + FD = 2FM$, $AB + CD = 2EM + 2FM = 2EF$. Taigi $2AB = 2EF$, $AB = EF = \frac{a+b}{2}$.
Pastaba. Sąlygoje pasakyta, kad keturkampis $ABDC$ — trapecija. Mokytojas turėtų mokėti įrodyti, kad šis keturkampis *tikrai* yra trapecija ir, be to, — lygiašonė.



553. $R_1 : R_2 = 2 : 1$. *Nurodymas.* Nagrinėkite trikampius CO_1A ir AO_2B ir pastebėkite, kad jie yra panašūs.

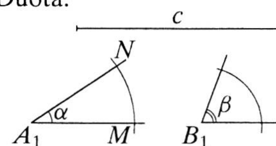
554. 1) *Nurodymas.* Įsitikinkite, kad $\triangle ODC$ — lygiakraštis.
2) *Nurodymas. I būdas.* Įsitikinkite, kad taškas C — apie $\triangle ODE$ apibrėžto apskritimo centras, OE — to apskritimo skersmuo. Remkitės įbrėžtinio kampo, besiremiančio į skersmenį, savybe.
II būdas. Pasinaudoję trikampio priekampio bei lygiašonio trikampio kampų prie pagrindo savybėmis įsitikinkite, kad $\angle ODE = 90°$.
3) *Nurodymas.* Įsitikinkite, kad $OD \parallel AB$.
4) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

555. $2R$. *Nurodymas.* Remkitės Talio teoremos išvada.

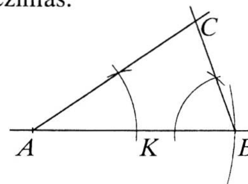
556. 1) a) Liniuote išmatuojame atkarpos c ilgį ir nubrėžiame atkarpą $AB = c$. Matlankiu išmatuojame kampų α ir β didumus ir nuo atkarpos c toje pačioje pusplokštumėje atidedame kampus α ir β (kampo α viršūnė yra taške A, o kampo β — taške B). Tų kampų kraštinės, nesančios tiesėje AB, susikerta taške C. Trikampis ABC — ieškomasis.

b) Nubrėžiame tiesę ir pažymime joje tašką A. Skriestuvu iš taško A, kaip iš centro, spinduliu, lygiu atkarpos c ilgiui, brėžiame lankelį, kuris kerta tiesę taške B. Skriestuvu iš taškų A_1 ir A, kaip iš centrų, brėžiame du bet kokio vienodo spindulio lankus. Lanko susikirtimo su kampo α kraštinėmis taškus pažymime M ir N, o lanko susikirtimo su AB tašką pažymime K. Skriestuvu iš taško K, kaip iš centro, spinduliu lygiu MN, brėžiame lankelį. Per lankelių susikirtimo tašką ir tašką A brėžiame spindulį. Tada $\angle A = \alpha$. Analogiškai braižome $\angle B = \beta$. Trikampis ABC — ieškomasis.

b) Duota:



Brėžimas:



2) Kai $\alpha + \beta < 180°$, tai galima nubraižyti du trikampius: vienas trikampis būtų vienoje tiesės AB pusplokštumėje, o kitas — kitoje. Tie trikampiai bus lygūs.
Kai $\alpha + \beta \geqslant 180°$, tai trikampio nubraižyti negalima.

557. a) 60°, 120°, 60°, 120°; b) 60°, 120°, 60°, 120°.

558. Mokykloje mokosi $49 - 24 = 25$ dešimtokai vaikinai. Taigi merginos ir vaikino porą galima išrinkti $24 \cdot 25 = 600$ (būdų).

559. Sakykime, kad klasėje buvo n dešimtokų. Sprendžiame lygtį:
a) $n(n-1) = 650$; b) $n(n-1) = 870$.
Atsakymas. a) 26; b) 30.

560. a) Iškilasis n-kampis turi $\frac{(n-3)\cdot n}{2}$ įstrižainių. Sprendžiame lygtį:
$\frac{(n-3)\cdot n}{2} = 20$, $n = -5$ (netinka), $n = 8$.
b) Iškilojo n-kampio kampų suma lygi $(n-2)\cdot 180°$. Kadangi $n = 8$, tai $(8-2)\cdot 180° = 1080°$.

561. a) $(-\infty; -4)$, $(6; +\infty)$; b) $(-4; -1)$, $(-1; 6)$; c) $[-4; -1)$, $(-1; 6)$; d) $(-\infty; -4]$, $(6; +\infty)$.

562. a) 10%; b) 22%.

563. *Pastaba.* Punkto a) sąlygoje turėtų būti parašyta ir $a \neq -3$, $a \neq 0$, o punkte b) dešinioji lygybės pusė turėtų būti tokia: $\frac{3}{2(1+a)^2}$.

564. 9 cm arba 18 cm. *Nurodymas.* Taikykite trikampio pusiaukraštinių savybę.

565. 1 ir 25.

566. Jonas pievą galėjo nupjauti per 6 valandas, o Petras — per 3 valandas.

567. a) $x = 1$; b) $x = 2$.

568. a) $[3; +\infty)$; b) sprendinių nėra.

569. a) $6{,}03 \cdot 10^{22}$; b) $-5{,}97 \cdot 10^{22}$; c) $1{,}8 \cdot 10^{43}$; d) $5 \cdot 10^{-3}$.

570. *Nurodymas.* Įsitikinkite, kad $AB = BC$.

571. Startinio penketuko žaidėjų amžiaus suma yra $5 \cdot 23{,}6 = 118$ (metų). Po pakeitimo penkių žaidėjų amžiaus suma yra $5 \cdot 22{,}8 = 114$ (metų). Kadangi vienam žaidėjui yra 19 metų, tai likusių keturių žaidėjų amžiaus suma yra $114 - 19 = 95$ (metai). Vadinasi, iš aikštelės išėjo $118 - 95 = 23$ metų žaidėjas.

572. *Pastaba.* Galimi yra ne du (sąlygoje prašoma išnagrinėti *abu* galimus atvejus), o *keturi* atvejai:
1) dviratininkai važiuoja vienas priešais kitą. Pirmasis dviratininkas per 2 h nuvažiuoja $12 \cdot 2 = 24$ (km), o antrasis — $15 \cdot 2 = 30$ (km). Abu kartu jie nuvažiuoja $24 + 30 = 54$ (km). Kadangi tarp jų buvo 35 km, tai po 2 valandų bus $54 - 35 = 19$ (km);
2) dviratininkai važiuoja į priešingas puses. Tada po 2 valandų tarp jų bus $24 + 30 + 35 = 89$ (km);
3) lėtesnis dviratininkas važiuoja paskui greitesnį. Tada po 2 valandų tarp jų bus $35 - 24 + 30 = 41$ (km);
4) greitesnis dviratininkas važiuoja paskui lėtesnį. Tada po 2 valandų tarp jų bus $35 - 30 + 24 = 29$ (km).

7.2. Sinusų ir kosinusų teoremos

Šiame skyrelyje parodoma, kur geometrijoje taikomi anksčiau nagrinėtų kampų sinusai ir kosinusai. Todėl skyrelyje gausu formulių. Teorinėje dalyje pateiktos ir įrodytos 4 naujos formulės, uždaviniuose — dar 12. Svarbiausios yra teorinėje dalyje nagrinėjamos trikampio ploto formulė bei sinusų ir kosinusų teoremos. Būtų gerai, kad iš uždaviniuose pateikiamų formulių mokiniai žinotų lygiagretainio (474 uždavinys) bei stačiakampio (475 uždavinys) plotų formules.

Pastaba. Teorinėje dalyje pateikta lygiagretainio kraštinių ir įstrižainių ilgius siejanti formulė. Programoje, pagal kurią buvo rašomas vadovėlis, nenurodyta šią formulę nagrinėti. Bet sprendžiant uždavinius ji praverčia, todėl jos ignoruoti nereikėtų.

Pakartoti:

kaip skaičiuojami trikampių ir keturkampių plotai;
Pitagoro teoremą;
kam lygi lygiagretainio visų kampų suma ir dviejų gretimų kampų suma;
dydžių proporcingumo sąvoką.

Išmokti:

sinusų teoremą;
kosinusų teoremą;
apskaičiuoti trikampio ir lygiagretainio plotus, kai žinomos dvi kraštinės ir kampas tarp jų;
formulę, siejančią lygiagretainio kraštinių ir įstrižainių ilgius.

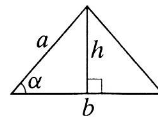
Šiame skyrelyje:

1. Pakartojama, kaip apskaičiuoti trikampio plotą, kai žinoma kraštinė ir į ją nubrėžta aukštinė.

   Nurodymas. Čia vertėtų pakartoti ir lygiagretainio ploto skaičiavimą, kai žinoma jo kraštinė ir į ją nubrėžta aukštinė.

2. Įrodoma teorema, remiantis kuria galima apskaičiuoti trikampio plotą, kai žinomos to trikampio dvi kraštinės ir kampas tarp jų.

   Nurodymai. 1) Čia vertėtų susieti abi trikampio ploto formules:



$$\left.\begin{array}{l} S = \frac{1}{2}ah, \\ S = \frac{1}{2}ab\sin C, \end{array}\right. \Rightarrow \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin C,\ h = b\sin C,$$

   ir paprašyti apskaičiuoti, pavyzdžiui, trikampio aukštinės h ilgį, kai $a = 2$, $b = 3$, $\angle C = 30°$, ir panašiai.

   2) Vertėtų išsiaiškinti, kaip apskaičiuoti lygiagretainio plotą, kai žinomos dvi kraštinės ir kampas tarp jų, t. y. galima išspręsti 574 uždavinį.

3. Įrodomos formulės, siejančios trikampio kraštines ir jo kampų sinusus — sinusų teorema.

   Nurodymai. 1) Silpnesniems mokiniams gali būti sunku suprasti „trigubą“ lygybę: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. Todėl pravartu surašyti lygybes atskirai: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

   2) Šios teoremos įrodymas yra nesunkus, todėl vertėtų jį panagrinėti net ir su silpnais mokiniais.

   3) Siekite, kad mokiniai *suprastų* žodinę sinusų teoremos formuluotę, o ne mintinai ją atkartotų.

4. Įrodomos formulės, siejančios trikampio kraštines ir jo kampų kosinusus — kosinusų teorema.

   Nurodymas. Kosinusų teoremos įrodymas yra gana sudėtingas, bet stipresni mokiniai turėtų gebėti ją įrodyti.

5. Pateikiama formulė, siejanti lygiagretainio kraštinių ir įstrižainių ilgius.

   Nurodymas. Įrodymo reikalaukite tik iš stipresnių mokinių.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

573–590 — teminiai uždaviniai, kiti — kartojimo.

8–16, 29–58, 66, 71–95, 97–103

Pastabos. 1) Visi šio skyrelio uždaviniai (išskyrus 573 ir 584) — tai keleto teoremų įrodymai ir daugelio formulių išvedimai, čia pat pateikiant tų formulių mechaniško pritaikymo pratimą. Tiesioginis sinusų ir kosinusų teoremų taikymas bus 3-iame skyrelyje sprendžiant trikampius. Todėl mokytojas, atsižvelgdamas į mokinių (klasės) žinių lygį, gali elgtis įvairiai, pvz.: jei klasė silpna, formulių galima neišvedinėti, o tiesiog jas užrašyti ir išspręsti keletą paprastų tų formulių taikymo pratimų. Realinio profilio klasės moksleiviai turėtų nesunkiai įrodyti pateiktus faktus ir išvesti formules, kurios dažnai palengvina uždavinių sprendimą. Žinoma, nereikia reikalauti, kad tas formules mokiniai įsimintų. Svarbu, kad jie žinotų, jog yra tokios formulės ir, esant reikalui, gebėtų jas susirasti ir taikyti.

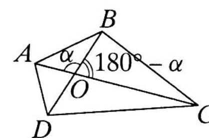
2) Skyrelyje nėra nei vieno uždavinio teoremos apie lygiagretainio įstrižainių kvadratų sumą taikymui. Šiai teoremai uždavinyne skirti 11 ir 12 uždaviniai.

573. a) $S = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 8\cdot \sin 135^\circ \approx 33{,}9\,(\text{cm}^2)$; b) $S = \frac{1}{2}\cdot 10^2\cdot \sin 102^\circ \approx 48{,}9\,(\text{cm}^2)$.

574. a) *Nurodymas.* Lygiagretainio plotas lygus dviejų lygių trikampių plotų sumai; b) $S = 13\cdot 8\cdot \sin 68^\circ \approx 96{,}4$. Tai svarbus uždavinys.

575. a) *Nurodymas.* Remkitės tuo, kad įstrižainės stačiakampį dalija į 4 lygiapločius trikampius.

b) $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} = \frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}\cdot OB\cdot OC\cdot \sin(180^\circ - \alpha) + \frac{1}{2}\cdot OC\cdot OD\cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}\cdot OD\cdot OA\cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}(OA\cdot OB + OB\cdot OC + OC\cdot OD + OD\cdot OA)\sin\alpha = \frac{1}{2}(OB(AO + OC) + OD(AO + OC))\sin\alpha = \frac{1}{2}(AO + OC)(OB + OD)\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha$.



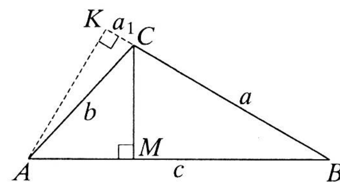
576. a) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$; jei $\angle A = \angle B$, tai $\sin A = \sin B$. Tada $a = b$.

b) 1) Įrodysime, kad trikampyje prieš didesnį kampą yra ilgesnė kraštinė. Tegul $\angle A < 90^\circ$, $\angle B < 90^\circ$ ir $\angle A > \angle B$. Tada $\sin A > \sin B$. Iš lygybės $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ gauname, kad $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$. Kadangi $\sin A > \sin B$, tai $\frac{\sin A}{\sin B} > 1$. Tada ir $\frac{a}{b} > 1$. Vadinasi, $a > b$.
Sakykime, kad $\angle A > 90^\circ$. Tada $\angle A > \angle B$ ir $\angle A + \angle B < 180^\circ$, t. y. $180^\circ - \angle A > \angle B$. Vadinasi, $\sin A = \sin(180^\circ - A) > \sin B$.
2) Analogiškai įrodysime, kad trikampyje prieš ilgesnę kraštinę yra didesnis kampas. Tegul $a > b$. Tada $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b} > 1$. Vadinasi, $\sin A > \sin B$. Jeigu $\angle A \leqslant 90^\circ$, tai $\angle A > \angle B$. Jeigu $\angle A > 90^\circ$, tai jis bukas. Kadangi kiti trikampio kampai smailūs, tai ir kampas B smailus, todėl $\angle A > \angle B$.

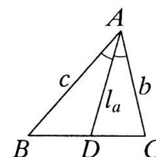
577. a) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$;
1) jei $c^2 < a^2 + b^2$, tai $a^2 + b^2 - 2ab\cos C < a^2 + b^2$. Iš čia $2ab\cos C > 0$, $\cos C > 0$ ir $0^\circ < \angle C < 90^\circ$. Kadangi didžiausias trikampio kampas yra smailus, tai trikampis yra smailusis;
2) jei $c^2 = a^2 + b^2$, tai $a^2 + b^2 - 2ab\cos C = a^2 + b^2$. Iš čia $2ab\cos C = 0$, $\cos C = 0$ ir $\angle C = 90^\circ$; trikampis yra statusis;
3) jei $c^2 > a^2 + b^2$, tai $a^2 + b^2 - 2ab\cos C > a^2 + b^2$. Iš čia $2ab\cos C < 0$, $\cos C < 0$ ir $90^\circ < \angle C < 180^\circ$; trikampis yra bukasis.

b) Trikampis yra: 1) statusis; didžiausias kampas lygus 90°; 2) smailusis; didžiausias kampas $\approx 83^\circ$; 3) bukasis; didžiausias kampas $\approx 141^\circ$.

578. $c = AM + MB = b\cos A + a\cos B$.
Kai $\triangle ABC$ — smailusis ($0^\circ < \angle C < 90^\circ$), tai analogiškai užrašomos ir kitos lygybės: $a = b\cos C + c\cos B$; $b = c\cos A + a\cos C$.
Kai $\triangle ABC$ — bukasis ($90^\circ < \angle C < 180^\circ$), tai $a + a_1 = c\cos B$. Tada $a = c\cos B - a_1 = c\cos B - b\cos(\angle ACK) = c\cos B - b\cos(180^\circ - \angle ACB) = c\cos B + b\cos C$. Analogiškai gauname, kad $b = c\cos A + a\cos C$.
Kai $\triangle ABC$ — statusis ($\angle C = 90^\circ$), tai turėsime jau žinomus sąryšius: $a = c\cos B$, $b = c\cos A$ ($\cos 90^\circ = 0$).



579. *Pastaba.* Šį uždavinį spręskite po 582 uždavinio.
1) $S_{ABC} = S_{BAD} + S_{DAC}$; $\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}cl_a\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}bl_a\sin\frac{A}{2}$,
$l_a\sin\frac{A}{2}(b + c) = bc\sin A$, $l_a = \frac{bc\sin A}{(b+c)\sin\frac{A}{2}} = \frac{bc\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{(b+c)\sin\frac{A}{2}} = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$;
2) $\approx 4{,}0$ cm.



580. b) $\approx 2{,}6$ cm.

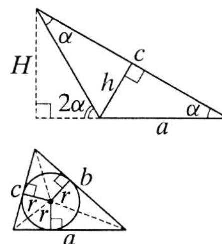
581. 1) $\triangle ABC$ — statusis, tai $\frac{a}{c} = \sin A$, $\frac{b}{c} = \sin B$. Kadangi $c = 2R$, tai $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = c = 2R$; $\sin C = \sin 90^\circ = 1$. Taigi $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.
2) $\triangle ABC$ — smailusis; $BD = 2R$, $\angle D = \angle A$ (įbrėžtiniai kampai, besiremiantys į tą patį lanką). Iš stačiojo trikampio BCD: $\frac{a}{2R} = \sin D$, $\frac{a}{2R} = \sin A$, $\frac{a}{\sin A} = 2R$. Iš stačiojo trikampio BAD gautume, kad $\frac{c}{\sin C} = 2R$. Nubrėžę iš viršūnės A apskritimo skersmenį analogiškai gautume, kad $\frac{b}{\sin B} = 2R$.
Pastaba. Labai patogu remtis 517 uždavinyje išvesta formule: $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$ (α — įbrėžtinis kampas ($\alpha < 90^\circ$), a — ilgis stygos, į kurią remiasi šis įbrėžtinis kampas, R — apskritimo spindulys).
3) $\triangle ABC$ — bukasis; $BD = 2R$. Kadangi keturkampis $ABCD$ įbrėžtinis, tai $\angle A + \angle D = 180^\circ$. Taigi $\angle D = 180^\circ - \alpha$. Iš stačiojo trikampio BCD: $\frac{a}{2R} = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$. Iš viršūnės A nubrėžę apskritimo skersmenį analogiškai kaip b) punkte gautume, kad $\frac{b}{\sin B} = 2R$ ir $\frac{c}{\sin C} = 2R$. Taigi $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.
Pastaba. Metodinėje literatūroje dažnai būtent ši formulė vadinama sinusų teorema. Spręsdami uždavinius ir naudodamiesi šia formule mes irgi sakysime, kad taikome sinusų teoremą.

582. *Nurodymas.* 1) Įsitikinkite, kad $\smile BD = \smile DC$. Tada AD — kampo BAC pusiaukampinė ir $\angle BAD = \angle BCD$.

2) Trikampiams ADC ir BAC taikome sinusų teoremą: $DC = 2R\sin\frac{A}{2}$ ir $BC = 2R\sin A$. Iš stačiojo trikampio DEC: $EC = DC\cos\frac{A}{2}$. Vietoj DC įrašę $2R\sin\frac{A}{2}$ gausime, kad $EC = 2R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$.

3) $BC = 2EC$. Pasinaudoję 2) punkte įrodytomis lygybėmis gauname, kad $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$.

Pastaba. Formulę $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ galima įrodyti ir taip: $S_\triangle = \frac{1}{2}aH = \frac{1}{2}ch$; $h = a\sin\alpha$; $\frac{c}{2} = a\cos\alpha$, tai $c = 2a\cos\alpha$; $H = a\sin 2\alpha$. Tada $\frac{1}{2}a^2\sin 2\alpha = \frac{1}{2}\cdot 2a^2\sin\alpha\cos\alpha$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Kai $2\alpha = \beta$, turėsime $\sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$.



583. 2) $S_\triangle = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}r(a+b+c)$; $r = \frac{2S}{a+b+c}$.

584. a) $S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC\cdot\sin C$, $\sin C = \frac{2S}{AC\cdot BC} = \frac{2\cdot 16}{5\cdot 8} = 0{,}8$, $\angle C \approx 53°$. Remdamiesi kosinusų teorema gauname, kad $AB \approx 6{,}4$ cm.

b) Kai kampas C yra bukas, tai $\angle C \approx 180° - 53° = 127°$. Remdamiesi kosinusų teorema gauname, kad $AB \approx 11{,}7$ cm.

585. a) $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = (1-\cos A)(1+\cos A)$. Iš kosinusų teoremos turime, kad $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

Tada $1 - \cos A = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{2bc}$,

$1 + \cos A = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c-a)(a+b+c)}{2bc}$,

$\sin^2 A = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{4b^2c^2}$;

b) kai $a+b+c = 2p$, tai $a+b-c = a+b+c-2c = 2p-2c = 2(p-c)$, $b+c-a = 2(p-a)$, $c+a-b = 2(p-b)$.

Tada $\sin^2 A = \frac{16p(p-c)(p-a)(p-b)}{4b^2c^2}$ ir $\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

c) $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bc\cdot\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

d) 1) $18\sqrt{7}\,\text{cm}^2$; 2) $48\,\text{cm}^2$.

586. a) *Nurodymas.* Spręsdami 1)–3) punktus remkitės formulėmis: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $S = \frac{abc}{4R}$ ir $r = \frac{2S}{a+b+c}$.

1) $S = 336$, $R = 16{,}25$, $r = 8$; 2) $S = 24$, $R = 8{,}125$, $r = 1{,}5$;

3) $S = 16\sqrt{6} \approx 39$, $R = \frac{35}{2\sqrt{6}} \approx 7$, $r = \sqrt{6} \approx 2{,}4$.

4) Remdamiesi statinio, esančio prieš 30° kampą, savybe gauname, kad $AB = 16$. Tada $R = 8$, $AC = 8\sqrt{3} \approx 13{,}9$, $S = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\sqrt{3} = 32\sqrt{3} \approx 55{,}4$,

$r = \frac{2\cdot 32\sqrt{3}}{8+8\sqrt{3}+16} = 4(\sqrt{3}-1) \approx 2{,}9$.

Pastaba. Ieškant į statųjį trikampį įbrėžto apskritimo spindulio labai patogu naudotis formule $r = \frac{a+b-c}{2}$ (a, b — statiniai, c — įžambinė, r — į trikampį įbrėžto apskritimo spindulys) (žr. Matematika 9, Uždavinynas, p. 62, uždavinys 63c)).

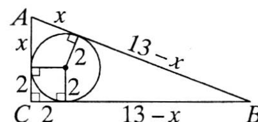
5) $\frac{2\sqrt{3}}{c} = \sin 60°$, $c = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60°} = 4$, $R = 2$; $AC = \frac{4}{2} = 2$ (statinis, esantis prieš 30° kampą), $r = \sqrt{3} - 1 \approx 0{,}7$;

6) $\sin A = \frac{25}{AB} = \frac{4}{5}$, $AB = 31{,}25$; $AC = \sqrt{31{,}25^2 - 25^2} = 18{,}75$, $R = 15{,}625$, $r = 6{,}25$.

b) Šio trikampio pagrindo ilgis lygus 24 cm, o plotas lygus $60\,\text{cm}^2$. Tada $R = 16{,}9$ cm, $r = 2{,}4$ cm.

587. *Pastaba.* Sąlygą reikėtų formuluoti taip: „Į statųjį trikampį ABC, kurio įžambinė AB lygi 13 cm, ...“

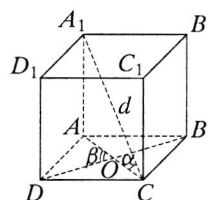
$AC = 2+x$, $BC = 15-x$. Pagal Pitagoro teoremą $(x+2)^2 + (15-x)^2 = 13^2$; $x_1 = 3$; tada $AC = 5$ cm, $BC = 12$ cm, $\operatorname{tg} A = \frac{12}{5} = 2{,}4$, $\angle A \approx 67°$; $x_2 = 10$; tada $AC = 12$ cm, $BC = 5$ cm, $\operatorname{tg} A = \frac{5}{12} \approx 0{,}417$, $\angle A \approx 23°$.



588. $V = \frac{1}{3}S_{\text{pagr}}\cdot H$, $S_{\text{pagr}} = \frac{d^2}{2}\sin\alpha$, $H = \frac{d}{2}\operatorname{tg}\beta$. Tada $V = \frac{d^3}{12}\sin\alpha\operatorname{tg}\beta$.

Pastaba. 588–590 uždavinius spręskite tik su stipresniais moksleiviais.

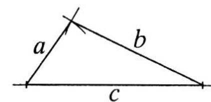
589. $V = S_{\text{pagr}}\cdot H$, $H = d\sin\alpha$, $S_{\text{pagr}} = \frac{AC^2}{2}\sin\beta$, $AC = d\cos\alpha$. Tada $S_{\text{pagr}} = \frac{d^2}{2}\cos^2\alpha\sin\beta$ ir $V = \frac{d^3}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha\sin\beta$.



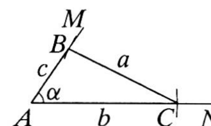
590. $S_{\text{šon}} = \pi Rl$. Iš sinusų teoremos: $\frac{b}{\sin\beta} = 2R$, $R = \frac{b}{2\sin\beta}$; $\frac{R}{l} = \cos\alpha$, $l = \frac{R}{\cos\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta\cos\alpha}$. Tada $S_{\text{šon}} = \frac{\pi b^2}{4\sin^2\beta\cos\alpha}$.

591. a) $\triangle ANB \backsim \triangle CNM$ (pagal du kampus). Tada $\frac{BN}{NM} = \frac{AB}{CM} = \frac{2CM}{CM} = \frac{2}{1}$;
b) $\triangle ANB \backsim \triangle CNM$, tai $\frac{AN}{NC} = \frac{2}{1}$; $\frac{AC}{NC} = \frac{AN+NC}{NC} = \frac{AN}{NC} + 1 = \frac{2}{1} + 1 = \frac{3}{1}$.
Pastaba. Matome, kad sąlygoje duotas įstrižainės ilgis — perteklinis duomuo.

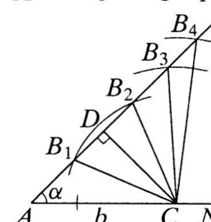
592. Skriestuvu atidedame atkarpą c ir iš jos galų, kaip iš centrų, spinduliais, lygiais a ir b, brėžiame lankelius. Lankelių susikirtimo tašką sujungiame su atkarpos c galais. Gautas trikampis — ieškomasis.
Pastaba. Su stipresne klase galima aptarti, kiek tokių trikampių galima nubraižyti ir ar visada galima nubraižyti trikampį, kai duotos 3 kraštinės.



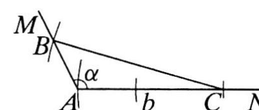
593. 1) Nubraižome kampą MAN, lygų kampui α (žr. 556 1b) uždavinį). Kampo kraštinėje AN atidedame atkarpą $AC = b$. Skriestuvu iš taško C kaip iš centro spinduliu, lygiu a, brėžiame lankelį, kuris kerta kampo kraštinę AM taške B. Taškus B ir C sujungę atkarpa gauname ieškomą trikampį.



2) Priklausomai nuo a, b ir α reikšmių galimi atvejai:
1) $\alpha < 90°$. Tada:
kai $a < CD = b\sin\alpha$, tai tokio trikampio nėra ir jo nubraižyti negalima;
kai $CD < a < b$, tai galima nubraižyti du trikampius: $\triangle ACB_1$ ir $\triangle ACB_2$;
kai $a = CD$, tai galima nubraižyti vieną trikampį: $\triangle ACD$;
kai $a = b$, tai galima nubraižyti vieną trikampį: $\triangle ACB_3$;
kai $a > b$, tai galima nubraižyti vieną trikampį: $\triangle ACB_4$.



2) $\alpha \geqslant 90°$. Tada:
kai $a \leqslant b$, tai tokio trikampio nėra;
kai $a > b$, tai galima nubraižyti vieną trikampį: $\triangle ABC$.



594. a) $5 \cdot 4 = 20$; b) A ir F, B ir C, D ir E;
c) $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{5}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{7}{10}$, $\mathbf{P}(C) = \frac{3}{10}$, $\mathbf{P}(D) = \frac{3}{5}$, $\mathbf{P}(E) = \frac{2}{5}$, $\mathbf{P}(F) = \frac{4}{5}$.

595. 7. Kraštinių ilgiai gali būti: 1 cm, 7 cm, 7 cm; 2 cm, 6 cm, 7 cm; 3 cm, 5 cm, 7 cm; 3 cm, 6 cm, 6 cm; 4 cm, 5 cm, 6 cm; 4 cm, 4 cm, 7 cm; 5 cm, 5 cm, 5 cm.
Nurodymas. Bet kurios trikampio kraštinės ilgis yra didesnis už kitų dviejų kraštinių ilgių skirtumą, ir yra mažesnis už jų sumą.

596. a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{2}{3}$.

597. a) $x < 2$, $x > 3$; b) $2 < x < 5$.

598. Firmos pelnas per savaitę yra: a) 1400 Lt; b) 1350 Lt, o pelno mokestis yra:
a) $1400 \cdot 0{,}29 = 406$ (Lt); b) $1350 \cdot 0{,}29 = 391{,}5$ (Lt).

599. a) $\frac{b+2a}{4ab}$; b) $\frac{3b-2}{ab}$; c) $\frac{16b^2}{25a^2}$; d) $\frac{8y^3}{27x^3}$.

600. a) $x = 3$, $x = 3{,}5$;
b) $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$. (*Nurodymas.* Sukelkite narius į vieną pusę, subendravardiklinkite, iškelkite bendrąjį dauginamąjį prieš skliaustus ir taikykite sandaugos, lygios nuliui, savybę.)
c) $x = -1$, $x = 9$; d) $x = -\frac{5}{6}$, $x = 1{,}5$.

601. a) $[-4; +\infty)$; b) $[0; +\infty)$; c) $(-\infty; 4]$; d) $(-\infty; -1]$.

602. a) 1) $a_1 = -5$; $d = 2$; $a_{10} = 13$; $a_{25} = 43$; 2) 280;
b) 1) $a_1 = 4{,}5$; $d = -0{,}5$; $a_{10} = 0$; $a_{25} = -7{,}5$; 2) -5.

603. 1) a) $(-6; -2{,}5)$, $(-6; 2{,}5)$, $(6; 2{,}5)$, $(6; -2{,}5)$ arba $(-2{,}5; -6)$, $(-2{,}5; 6)$, $(2{,}5; 6)$, $(2{,}5; -6)$; b) 13; 2) $y = \frac{5}{12}x$, $y = -\frac{5}{12}x$ arba $y = 2{,}4x$, $y = -2{,}4x$.

604. *Atsakymas.* **B**. $1 - \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1\cdot 2}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot 2}}} = 1 - \cfrac{1}{1+\cfrac{1\cdot 3}{\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot 3}} = 1 - \frac{1}{1+\frac{3}{1}} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

605. 47.

606. 3.

607. 18 dienų.

608. Per 10 minučių.

7.3. Bet kokių trikampių sprendimas

Tai labai svarbus skyrelis. Reikia siekti, kad visi mokiniai gebėtų spręsti uždavinius, analogiškus vadovėlyje pateiktiems pavyzdžiams.

Pakartoti:

sinusų ir kosinusų teoremas;
ką vadiname stačiųjų trikampių sprendimu;
kam lygi trikampio kampų suma.

Išmokti spręsti bet kokius trikampius.

Šiame skyrelyje:

1. Nusakoma, ką vadiname bet kokių trikampių sprendimu.

Pastaba. Metodinėje literatūroje vietoj termino *bet kokių trikampių sprendimas* dažnai vartojamas terminas *pražulniųjų trikampių sprendimas* — tuo siekiant pabrėžti, kad nagrinėjami nestatieji trikampiai.

2. Išnagrinėjami keturi galimi trikampių sprendimo atvejai.

Pastaba. Kaip ir stačiųjų trikampių sprendimo atveju, uždavinių atsakymai priklauso nuo skaičiavimo būdo, apvalinimų skaičiaus ir tikslumo.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

609–620 — teminiai uždaviniai, kiti — kartojimo. 17–28

Pastabos. 1) Spręsdami uždavinius apsiribosime trigonometrinių funkcijų reikšmėmis tūkstantųjų tikslumu.
2) Skaičiuodami skaičiuokliu (imdami tiek ženklų po kablelio, kiek rodo skaičiuoklis) gausime tikslesnį atsakymą, kuris dažnai gali skirtis nuo pateikto atsakymo.
3) Sprendžiant įvairius uždavinius dažnai tenka apvalinti ir tarpinį rezultatą. Žinoma, nuo to irgi priklausys atsakymo tikslumas. Kuo mažiau bus apytikslių tarpinių rezultatų arba kuo jie bus tikslesni, tuo ir atsakymas bus tikslesnis.

609. a) ≈ 7; b) ≈ 12; c) ≈ 2.

610. a) $c \approx 57$, $\angle A \approx 60°$, $\angle B \approx 20°$; b) $c \approx 10{,}7$, $\angle A \approx 150°$, $\angle B \approx 15°$;
c) $a \approx 14{,}15$, $\angle B \approx 68°$, $\angle C \approx 42°$; d) $b \approx 31$, $\angle A \approx 22°$, $\angle C \approx 34°$.

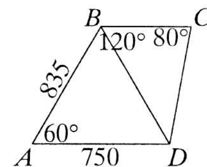
611. a) $\angle A = 68°$, $b \approx 11{,}4$, $c \approx 9{,}9$; b) $\angle B = 69°$, $a \approx 34{,}3$, $c \approx 53{,}2$;
c) $\angle C = 74°$, $a \approx 9{,}7$, $b \approx 23{,}7$; d) $\angle C = 66°$, $b \approx 96{,}6$, $c \approx 88{,}7$.

612. a) $\angle A \approx 24°$, $\angle B \approx 64°$, $\angle C \approx 92°$; b) $\angle A \approx 73°$, $\angle B \approx 60°$, $\angle C \approx 46°$;
c) $\angle A \approx 39°$, $\angle B \approx 48°$, $\angle C \approx 94°$; d) $\angle A \approx 25°$, $\angle B \approx 57°$, $\angle C \approx 98°$.

613. a) $\sin A = \frac{25\sin 72°}{36} \approx 0{,}660$. Kadangi $b = 36 > 25 = a$, tai kampas A negali būti bukas. Vadinasi, $\angle A \approx 41°$. Tada $\angle C \approx 67°$, $c \approx \frac{36\sin 67°}{\sin 72°} \approx 34{,}9$;
b) $\sin B = \frac{8\sin 85°}{10} \approx 0{,}797$. Kadangi $c = 10 > 8 = b$, tai kampas B negali būti bukas. Vadinasi, $\angle B \approx 53°$. Tada $\angle A \approx 42°$, $a \approx \frac{10\sin 42°}{\sin 85°} \approx 6{,}7$;
c) kadangi $c = 12 > 10 = a$, tai kampas C turi būti didesnis už kampą A. Tačiau kampas A — bukas, o dviejų bukųjų kampų trikampyje būti negali. Vadinasi, tokio trikampio nėra;
d) $\sin B = \frac{8\sin 110°}{10} \approx 0{,}752$, $\angle B \approx 49°$, $\angle C \approx 21°$, $c \approx \frac{10\sin 21°}{\sin 110°} \approx 3{,}8$;
e) $\sin C = \frac{10\sin 42°}{8} \approx 0{,}836$. Kadangi $c = 10 > 8 = b$, tai yra du kampai, kurių sinusai lygūs 0,836: $\angle C_1 \approx 57°$ ir $\angle C_2 \approx 180° - 57° = 123°$. Tada $\angle A_1 \approx 81°$, $a_1 \approx \frac{8\sin 81°}{\sin 42°} \approx 11{,}8$; $\angle A_2 \approx 15°$, $a_2 \approx \frac{8\sin 15°}{\sin 42°} \approx 3{,}1$.
f) $\sin C = \frac{10\sin 42°}{5} \approx 1{,}338 > 1$. Vadinasi, tokio trikampio nėra.

614. $\approx 26{,}6$ m.

615. Nubrėžiame keturkampio įstrižainę BD. Pagal kosinusų teoremą: $BD^2 = 835^2 + 750^2 - 2 \cdot 835 \cdot 750 \cdot \cos 60° = 633\,475$, $BD \approx 796$ m. Pagal sinusų teoremą: $\sin\angle ABD \approx \frac{750\sin 60°}{796} \approx 0{,}816$, $\angle ABD \approx 55°$; $\angle DBC \approx 120° - 55° = 65°$; $\angle BDC \approx 180° - (65° + 80°) = 35°$. Pagal sinusų teoremą: $BC = \frac{BD\sin\angle BDC}{\sin C} \approx \frac{796\sin 35°}{\sin 80°} \approx 464$ (m), $DC = \frac{BD\sin\angle DBC}{\sin C} \approx \frac{796\sin 65°}{\sin 80°} \approx 732$ (m). Tada $P_{ABCD} \approx 835 + 750 + 732 + 464 = 2781$ (m); $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{DBC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin A + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \cdot \sin C \approx \frac{1}{2}(835 \cdot 750\sin 60° + 464 \cdot 732\sin 80°) \approx 438\,443$ (m^2).



616. a) $AC \approx 14{,}6$ m, $BD \approx 17{,}5$ m, $\angle A \approx 105°$, $\angle C \approx 91°$, $\angle D \approx 64°$;
b) $AC \approx 11{,}5$ m, $BD \approx 19$ m, $CD \approx 14$ m, $\angle C \approx 117°$, $\angle D \approx 48°$.

617. a) 7 cm; b) $10\sqrt{3} \approx 17{,}32\,\text{cm}^2$.

618. a) $h = 2{,}5\,\text{tg}\,63° \approx 4{,}9$ cm; $S \approx \frac{7+12}{2} \cdot 4{,}9 = 46{,}6$ (cm^2);
b) $h = 7\,\text{tg}\,46° \approx 7{,}25$; $S \approx \frac{21+35}{2} \cdot 7{,}25 = 203$ (cm^2);
$AB = \frac{7}{\cos 46°} \approx 10{,}1$ (cm) (AB — šoninė kraštinė).

619. a) $\approx 115{,}9\,\text{cm}^2$; b) $\approx 15{,}1$; $\approx 18{,}7\,\text{cm}$; c) $\approx 55°$.

620. *Pastaba.* Punkto b) sakinio dalį „jeigu $MP = 15\,\text{cm}$, $PK = 8\,\text{cm}$, $PL = 12\,\text{cm}$“ reikia priskirti ir punktui a).
a) $MK = 17\,\text{cm}$, $ML = \sqrt{369} = 3\sqrt{41} \approx 19{,}2\,(\text{cm})$;
b) $\frac{MP}{PK} = \operatorname{tg}\angle MKP$, $\operatorname{tg}\angle MKP = \frac{15}{8} = 1{,}875$, $\angle MKP \approx 62°$. Analogiškai randame, kad $\angle MLP \approx 51°$.

621. Sakykime, kad dėžutės pagrindo kraštinė yra x cm. Tada dėžutės aukštis yra $2x$ cm. Pagal sąlygą: $2x + x + 2x = 15$, $x = 3\,\text{cm}$. Tada $V = 54\,\text{cm}^3$, o $S_{\text{pav}} = 81\,\text{cm}^2$.

622. $1331\,\text{cm}^3$.

623. $H \approx 10{,}8\,\text{cm}$, $r \approx 5{,}4\,\text{cm}$.

624. $\approx 15{,}7\,\text{cm}^3$.

625. Gautas kūnas — tai iš ritinio, kurio aukštis yra a, o pagrindo spindulys $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, išimti du vienodi kūgiai; kūgio aukštinė yra $\frac{a}{2}$, o pagrindo spindulys sutampa su ritinio pagrindo spinduliu ir lygus $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Taigi gauto kūno tūris $V = \frac{\pi a^3}{2}$, o paviršiaus plotas $S_{\text{pav}} = 2\sqrt{3}\pi a^2$.

626. *Pastaba.* Šį uždavinį gali spręsti tie mokiniai, su kuriais išsiaiškinote temą „Nepriklausomi įvykiai“ (žr. 5 skyrių, p. 115).
a) $0{,}75 \cdot 0{,}9 = 0{,}675$; b) $(1 - 0{,}75) \cdot (1 - 0{,}9) = 0{,}025$;
c) $0{,}75 \cdot (1 - 0{,}9) = 0{,}075$; d) $(1 - 0{,}75) \cdot 0{,}9 = 0{,}225$.

627. **D**. *Nurodymas.* $4321 - 1234 = 3087$.

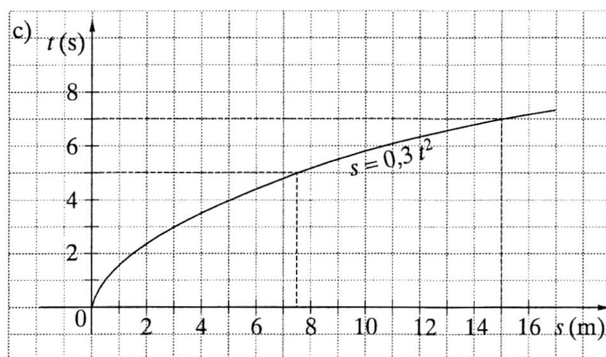
628. Lygtis neturi realių sprendinių, kai: a) $-12 < t < 12$; b) $-16 < t < 16$; lygtis turi vieną sprendinį, kai: a) $t = -12$ arba $t = 12$; b) $t = -16$ arba $t = 16$; lygtis turi du skirtingus sprendinius, kai: a) $t < -12$ arba $t > 12$; b) $t < -16$ arba $t > 16$.

629. a) 1264 Lt; b) 1552 Lt.

630. a) $x = -1$; b) $x = 3$.

631. a) $y = x + 4$; b) $y = -x - 2$.

632. Tolygiai greitėjančio (lėtėjančio) kūno nueitas atstumas laiko momentu t apskaičiuojamas pagal formulę $s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$; čia v_0 — pradinis greitis, t — judėjimo laikas, a — pagreitis. Mūsų atveju $v_0 = 0$, $a = 0{,}6\,\text{m/s}^2$.
a) $s = \frac{at^2}{2} = \frac{0{,}6t^2}{2} = 0{,}3t^2$;
b) $s_1 = 0{,}3t_1^2$, $s_2 = 0{,}3t_2^2$, $\frac{s_1}{s_2} = \frac{0{,}3t_1^2}{0{,}3t_2^2} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2$.



d) $\approx 5\,\text{s}$, $\approx 7\,\text{s}$.

633. a) 5; 8; 11; b) 4; 6; 8; 10; 12.

634. $y = x + 4$, $y = -x + 4$, $y = x - 4$, $y = -x - 4$.

635. Nuo 1 iki 147 yra 147 skaičiai. Taigi užduotims sunumeruoti reikėjo 147 skaičių.
Atsakymas. **A**.
Pastaba. Galite paprašyti mokinių suskaičiuoti, kiek *skaitmenų* reikėjo šioms užduotims sunumeruoti. Atsakymas būtų 333 skaitmenys, nes 147 užduotims sunumeruoti panaudota 9 vienaženkliai, 90 dviženklių ir 48 triženkliai skaičiai, kuriems užrašyti reikia $1 \cdot 9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 48 = 333$ skaitmenų.

636. a) 100 ha, 105 ha; b) 42 cnt/ha, 40 cnt/ha.

637. a) $14 \cdot 10^{10} = 1{,}4 \cdot 10^{11}$; b) $\frac{1}{2 \cdot 10^{11}} = 0{,}5 \cdot 10^{-11} = 5 \cdot 10^{-12}$.

638. a) $(1 - 4b)(b - 1)(b + 1)$; b) $(y - 3x)(2 - y - 3x)$; c) $(b - a)(1 + a + b)$; d) $(2x - y)(2x + y - 1)$.

639. Sakykime, kad yra x vagonų, o kiekviename vagone yra y vietų. Sudarome lygtį su dviem nežinomaisiais: $xy = 737$. Kadangi $737 = 11 \cdot 67 = 1 \cdot 737$, tai gauname 4 natūraliuosius lygties sprendinius $(x; y)$: (1; 737), (11; 67), (67; 11), (737; 1). Kadangi sunkoka įsivaizduoti traukinį su 67 (ar 737) vagonais, tai paskutiniai du sprendiniai atkrenta. Taip pat sunkoka įsivaizduoti, kad vagone tilptų 737 keleiviai. Vadinasi, traukinyje buvo 11 vagonų, o kiekviename vagone — 67 vietos.

7.4. Taisyklingųjų trikampių perimetrai ir plotai. Apskritimo ilgis ir skritulio plotas

Tai nėra svarbus skyrelis. Jį nagrinėti galima tik su stipriausiais mokiniais. Tačiau su visais mokiniais vertėtų prisiminti: apskritimo ilgio ir skritulio ploto formules, įbrėžtinių ir apibrėžtinių daugiakampių sąvokas bei taisyklinguosius daugiakampius (trikampius, keturkampius, šešiakampius). Siūlytume su visais mokiniais išspręsti 640, 641 ir 642 uždavinius.

Pakartoti:

apskritimo ilgio ir skritulio ploto skaičiavimo formules;
kas yra skaičius π;
įbrėžtinio ir apibrėžtinio daugiakampių sąvokas;
taisyklinguosius daugiakampius (lygiagraštį trikampį, kvadratą, taisyklingąjį šešiakampį).

Išmokti remtis vadovėlyje pateiktomis formulėmis skaičiuojant apibrėžtinių ir įbrėžtinių taisyklingųjų daugiakampių kraštinių ilgius, perimetrus ir plotus.

Šiame skyrelyje:

1. Primenamos apskritimo ilgio ir skritulio ploto formulės: $C = 2\pi R$, $S = \pi R^2$.

Nurodymas. Toliau esančios medžiagos galima nenagrinėti, tik mokiniams reikėtų paaiškinti, kad šių formulių įrodymas remiasi įbrėžtiniais ir apibrėžtiniais taisyklingaisiais daugiakampiais. Mokiniams neturėtų būti sunku suprasti įrodymo idėją: kai į apskritimą įbrėžiame taisyklingąjį n-kampį, tai jo perimetras ir plotas yra mažesnis už to skritulio ilgį ir plotą, o kai apibrėžiame — atvirkščiai, apibrėžtinio daugiakampio perimetras ir plotas yra didesni už skritulio ilgį ir plotą, t. y. $P_{n\text{į}} < C < P_{n\text{a}}$, $S_{n\text{į}} < S < S_{n\text{a}}$. Didinant įbrėžtinio ir apibrėžtinio daugiakampių kraštinių skaičių, tas daugiakampis vis panašės į apskritimą, jo perimetras artės prie apskritimo ilgio, o plotas — prie skritulio ploto.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

640–654 uždaviniai yra teminiai, kiti — kartojimo.

59–65, 67–70, 96

Pastabos. 1) Sąryšius tarp taisyklingojo trikampio, keturkampio ir šešiakampio kraštinės ilgio a ir įbrėžtinio bei apibrėžtinio apskritimų spindulių ilgių r ir R nagrinėjome 9 klasėje (žr. Matematika 9, II dalis, p. 42). Todėl 640–642 pratimus turėtų gebėti išspręsti visi moksleiviai.
2) Visi kiti uždaviniai pateikti kaip neprivalomi. Tačiau kai kuriuos jų, pvz., 643–645, 649, 652, galėtų spręsti ir vidutinių gabumų moksleiviai.
3) Teorinėje dalyje pateikta nemažai formulių, kurias galima taikyti ieškant į spindulio R apskritimą įbrėžtų ir apie jį apibrėžtų taisyklingųjų n-kampių perimetrų ir plotų. Jokiu būdu nereikalaukite, kad moksleiviai tas formules mokėtų. Visus šiame skyrelyje pateiktus pratimus nesunkiai galima išspręsti ir nežinant tų formulių. Daug svarbiau, kad mokiniai gebėtų pagal sąlygą pasidaryti brėžinį ir apskaičiuoti reikiamus dydžius.

640. $2\sqrt{3}$ cm, 12 cm.

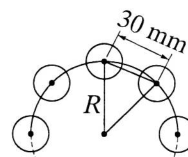
641. 4 cm, $4\sqrt{2}$ cm.

642. $6\sqrt{3}$ cm, $6\sqrt{3}$ cm.

643. a) $P_{\text{į}} \approx 58{,}8$ cm, $S_{\text{į}} \approx 237{,}75$ cm^2, $P_{\text{a}} \approx 72{,}7$ cm, $S_{\text{a}} \approx 363{,}5$ cm^2;
b) $P_{\text{į}} \approx 61{,}8$ cm, $S_{\text{į}} \approx 294$ cm^2, $P_{\text{a}} \approx 65$ cm, $S_{\text{a}} \approx 325$ cm^2.

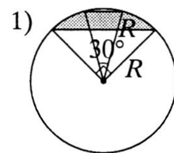
644. a) $288\sqrt{3} \approx 498{,}5$ cm^2; b) ≈ 2070 cm^2.

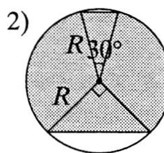
645. *Nurodymas.* Mokiniams gali kilti sunkumų aiškinantis, kur yra apskritimas, kuriame išsidėsčiusios kniedės. Tai apskritimas, kuriame yra kniedžių centrai. *Atsakymas.* ≈ 72 mm.



646. a) $S_{\text{nuop}} = S_{\text{išp}} - S_{\triangle} = \frac{\pi R^2}{360}\alpha - \frac{1}{2}R^2 \sin\alpha = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{180}\alpha - \sin\alpha\right)$.
b) Skritulio, kurio spindulys yra R, plotas lygus πR^2. Pilnutinis kampas turi 2π radianų, todėl išpjovos, kurios centrinis kampas yra 1 radianas, plotas lygus $\frac{\pi R^2}{2\pi} = \frac{R^2}{2}$, o plotas išpjovos, kurios centrinis kampas yra α radianų, lygus $\frac{R^2}{2}\alpha$. Trikampio, kurio dviejų kraštinių ilgiai yra vienodi ir lygūs R, o kampas tarp tų kraštinių lygus α radianų, plotas lygus $\frac{1}{2}R^2 \sin\alpha$. Tada $S_{\text{nuop}} = \frac{R^2}{2}\alpha - \frac{1}{2}R^2 \sin\alpha = \frac{R^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$.
Pastabos. 1) Brėžinys, esantis šalia punkto b), turėtų būti šalia pastabos, o įrodant punktą b) reikia naudotis punkto a) brėžiniu.
2) Skaičiuojant skaičiuokliu, kai kampas α matuojamas radianais, skaičiuoklio nustatymas turi būti „RAD“.

647. 1) a) ≈ 6 cm^2; b) $\approx 0{,}15$ cm^2; 2) $\approx 42{,}8$ cm^2.





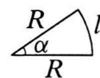
648. Galimi du atvejai:

1) $S = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{180°} \cdot 90° - \sin 90°\right) - \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{180°} \cdot 30° - \sin 30°\right) =$
$= \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\right) = \frac{R^2(2\pi - 3)}{12}$;

2) $S = \pi R^2 - \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{180°} \cdot 90° - \sin 90°\right) - \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{180°} \cdot 30° - \sin 30°\right) = \frac{R^2(8\pi + 9)}{12}$.

649. $S_{\text{nuop}} = \frac{18^2}{2}\left(\frac{\pi}{180°} \cdot 40° - \sin 40°\right) \approx 8{,}9\,(\text{cm}^2)$.

650. $S_{\text{nuop}} = \frac{5^2}{2}(1{,}2 - \sin 1{,}2) \approx 3{,}35\,(\text{dm}^2)$.
Pastaba. Dar kartą atkreipkite moksleivių dėmesį, kad skaičiuoklio nustatymas turi būti „RAD“.



651. 7. *Nurodymas.* Remiamės tuo, kad $l = R\alpha$ ir sprendžiame lygčių sistemą:
$\begin{cases} 2R + l = 28, \\ \frac{R^2}{2}\alpha = 49. \end{cases}$

652. 4 cm.

653. a) $(\sqrt{3}; 1)$; b) $(0; 3)$; c) $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}; \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$; d) $(-1; 0)$; e) $(-2{,}5; 2{,}5\sqrt{3})$.

654. $\approx 28°$.

655. $\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$. Pagal sinusų teoremą: $\frac{a}{\sin(180° - (\beta+\gamma))} = \frac{b}{\sin\beta}$,
$b = \frac{a \sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$. Todėl $S_\triangle = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)} \cdot \sin\gamma = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}$.

656. $\frac{1}{8}$.

657. 1) $P_1(x) = 4x$, $P_2(x) = 2x + 8$, $P_3(x) = 3x + 3$;
3) $(4; 16)$, $(3; 12)$, $(5; 18)$;
4) a) 20; 21; 24; b) 13,5; 14; 15;
5) kai $0 < x < 3$, tai $P_1(x) < P_3(x) < P_2(x)$; kai $3 < x < 4$, tai $P_3(x) < P_1(x) < P_2(x)$; kai $4 < x < 5$, tai $P_3(x) < P_2(x) < P_1(x)$; kai $x > 5$, tai $P_2(x) < P_3(x) < P_1(x)$;
6) a) $S_1(x) = x^2$, $S_2(x) = \frac{x^2}{4} + 2x$, $S_3(x) = \frac{(x+1)^2\sqrt{3}}{4}$; b) $4\sqrt{3}$; 8,25; 9; c) $x = 8$; d) $\left(0; 2\frac{2}{3}\right)$.

8. ERDVĖS GEOMETRIJA

Programoje, pagal kurią buvo rašomi naujieji pagrindinės mokyklos matematikos vadovėliai, *nebuvo* numatyta nagrinėti erdvės geometriją. Bet 2000 metų Švietimo ir mokslo ministerijos parengtoje programoje nurodyta, kad 10 klasėje reikia mokyti stereometrijos elementų (žr. *Bendrojo lavinimo mokyklos programos, Matematika V–XII klasei*, Vilnius, 2000):

7. Erdviniai kūnai	Moksleivių gebėjimų reikalavimai
Plokštumų tarpusavio padėtis, kampas tarp plokštumų, kampas tarp tiesės ir plokštumos. Erdvinių kūnų ašiniai pjūviai. Erdvinių kūnų statmenosios projekcijos.	Gebėti apskaičiuoti erdvinių kūnų elementus, paprasčiausių erdvinių kūnų junginių paviršiaus plotus ir tūrius, brėžti paprasčiausius kūnų pjūvius, pasinaudoti žiniomis apie tiesių ir plokštumų sudaromus kampus, trigonometrinėmis priklausomybėmis. Mokėti nubrėžti nesudėtingų erdvinių kūnų statmenąsias projekcijas.

Todėl ekspertų komisija įpareigojo vadovėlio autorius parengti atitinkamą vadovėlio skyrių. Ko gero tikslingiau būtų nesukoncentruoti stereometrijos mokymo 10 klasės matematikos kurso pabaigoje, o dėstyti stereometriją mažesnėmis dalimis pradedant 8-ąja arba bent 9-ąja klasėmis. Vidurinėje mokykloje bendrajame kurse iš viso nenumatyta nagrinėti stereometriją, o išplėstinio kurso programoje nurodyta (žr. *Lietuvos bendrojo lavinimo mokyklos bendrosios programos ir bendrojo išsilavinimo standartai. XI–XII klasės.* Vilnius, Švietimo plėtotės centras, 2002):

Stereometrija (išplėstinis kursas)
Supažindinimas su stereometrijos aksiomomis. Pagrindinių stereometrijos teiginių (tiesių ir plokštumų lygiagretumo, statmenumo, kampų tarp tiesių ir plokštumų, tarp plokštumų) įrodymai ir taikymai geometrinių kūnų savybėms nagrinėti bei plotų ir tūrių uždaviniams spręsti. Geometrinių kūnų paviršių plotų ir tūrių skaičiavimo uždaviniai. Paprasčiausi geometrinių kūnų junginiai ir pjūviai, jų paviršių plotų ir tūrių radimas.

11–12 klasės bendrojo kurso matematikos vadovėlyje neplanuojama atskirai nagrinėti stereometrijos, o išplėstinio kurso vadovėlyje stereometriją pateikti 12 klasės pabaigoje.

Gal vėlesnėse programose požiūris į stereometrijos vietą vidurinėje ir pagrindinėje mokykloje keisis. Todėl planuojant darbą mokytojui būtina susipažinti su naujausiais *tuo metu* galiojančiais dokumentais ir remiantis jais rengti teminį darbo planą.

Šio skyriaus medžiagą galima suskirstyti į tris dalis:

- 1–3 skyreliai. Kampai tarp tiesių ir plokštumų;
- 4 skyrelis. Erdvinių kūnų ortogonaliųjų projekcijų braižymas;
- 5–6 skyreliai. Nupjautinės piramidės ir nupjautinio kūgio paviršių plotai ir tūriai.

Svarbiausi yra 1–3 skyreliai. Galima laikyti, kad šiuose trijuose skyreliuose yra pateikta visa vidurinės mokyklos stereometrijos medžiaga. 4 skyrelis yra praktinio pobūdžio. Manome, kad kalbėti apie erdvinių kūnų vaizdavimą reikėtų ne tik 10 klasės pabaigoje, bet žymiai anksčiau — jau nuo 5 klasės, kai plokštumoje vaizduojami erdviniai kūnai. 10 klasėje pakaktų kalbėti apie erdvinių kūnų projekcijų braižymą. 5–6 skyreliai skirti rimčiau besidomintiems matematika, ir juos nagrinėkite tik su stipriausiais mokiniais.

Nurodymas. Mokant stereometrijos dažnai pravartu remtis erdvinių kūnų vaizdiniais; pavyzdžiui, stačiakampio gretasienio vaizdinys gali būti klasė ar kambarys.

Minimalus lygmuo:

1. Žinoti, mokėti nusakyti ir pavaizduoti, kokia gali būti dviejų tiesių tarpusavio padėtis erdvėje.
2. Mokėti nusakyti, kaip randamas kampas tarp dviejų prasilenkiančių tiesių.
3. Žinoti, mokėti nusakyti ir pavaizduoti, kokia gali būti tiesės ir plokštumos tarpusavio padėtis.
4. Mokėti nusakyti, kaip randamas kampas tarp tiesės ir plokštumos.
5. Žinoti, mokėti nusakyti ir pavaizduoti, kokia gali būti dviejų plokštumų tarpusavio padėtis.
6. Mokėti nusakyti, kaip randamas kampas tarp dviejų plokštumų.
7. Žinoti, kas yra ritinio ir kūgio ašinis pjūvis.

Pagrindinis lygmuo:

8. Žinoti pagrindines stereometrijos aksiomas.
9. Žinoti, kad per dvi susikertančias ar lygiagrečias tieses eina vienintelė plokštuma.
10. Mokėti nusakyti tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymius.
11. Mokėti nusakyti tiesės ir plokštumos statmenumo požymį.
12. Mokėti nusakyti plokštumų lygiagretumo požymį.
13. Mokėti nusakyti plokštumų statmenumo požymį.
14. Suprasti, kas yra statmenosios kūno projekcijos (horizontalioji, frontalioji, profilinė).
15. Suprasti, ką vadiname nupjautine piramide ir nupjautiniu kūgiu.

Aukštesnysis lygmuo:

16. Gebėti įrodyti, kad per dvi susikertančias tieses eina vienintelė plokštuma.
17. Žinoti trijų statmenų teoremą.
18. Gebėti įrodyti plokštumų lygiagretumo požymį.
19. Gebėti įrodyti plokštumų statmenumo požymį.
20. Spręsti uždavinius, susijusius su nupjautinės piramidės ir nupjautinio kūgio paviršių plotais ir tūriais.

8.1. Dviejų tiesių tarpusavio padėtis erdvėje. Kampas tarp prasilenkiančių tiesių

Skyrelio pavadinimas nusako pagrindinį tikslą — išsiaiškinti, kokia gali būti dviejų erdvės tiesių tarpusavio padėtis ir kaip rasti kampą tarp prasilenkiančių tiesių.

Pakartoti:

kokios yra pagrindinės planimetrijos figūros ir kaip jos žymimos;
kokia gali būti dviejų plokštumos tiesių tarpusavio padėtis;
ką vadiname kampu tarp dviejų susikertančių tiesių;
ką vadiname aksioma;
kiek tiesių galima nubrėžti per du skirtingus taškus.

Išmokti:

kokios yra pagrindinės stereometrijos figūros;
stereometrijos aksiomas;
kokia gali būti dviejų erdvės tiesių tarpusavio padėtis;
kaip rasti kampą tarp prasilenkiančių tiesių;
kas yra kūgio ašinis pjūvis, ritinio ašinis pjūvis.

Šiame skyrelyje:

1. Pirmajame skyrelio puslapyje supažindinama su stereometrijos sąvoka, nusakomos paprasčiausios stereometrijos figūros, įvedami jų žymenys.

   Nurodymas. Atkreipkite mokinių dėmesį į puslapio apačioje esančius žymenis ($\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$). Pirmieji du vartojami žymint taško priklausymą tiesei ar plokštumai, antrieji — tiesės priklausymui plokštumai pažymėti. Aišku, nėra būtina, kad mokiniai šiuos žymenis vartotų. Be abejo, nereikia laikyti klaida, jei mokiniai vietoj ženklų $\in$, $\notin$ parašys $\subset$, $\not\subset$ (ir atvirkščiai).

2. Pateikiamos stereometrijos aksiomos.

   Nurodymai. 1) Reikia siekti, kad mokiniai suvoktų šias aksiomas ir mokėtų jas nusakyti savais žodžiais.
   2) Atkreipkite dėmesį į sąvokas *pusplokštumė*, pusplokštumės kraštas.
   3) Sunkiau suvokiama mokiniams gali būti 3 aksioma. Prie jos bus grįžtama 3-iame skyrelyje. Čia mokiniams galima pasakyti, kad susikertančios tiesės turi bendrą tašką, o susikertančios plokštumos — bendrą tiesę.

3. Nagrinėjama, kokia gali būti dviejų erdvės tiesių tarpusavio padėtis.

   Nurodymai. 1) Svarbiausia, kad mokiniai suvoktų, jog erdvėje tiesės gali būti lygiagrečios, kirstis (kaip ir plokštumos tiesių atveju) bei prasilenkti.
   2) Svarbu, kad mokiniai „patikėtų“ faktu, jog per dvi lygiagrečias ar susikertančias tieses eina vienintelė plokštuma.
   3) Siekite, kad visi mokiniai mokėtų pavaizduoti prasilenkiančias tieses, erdvinių kūnų (prizmės, piramidės ar pan.) modelyje gebėtų nurodyti prasilenkiančių tiesių poras.
   4) Atkreipkite dėmesį į žymenį $\cap$.

4. Nagrinėjant visas galimas dviejų tiesių tarpusavio padėtis aiškinama, kam lygus kampas tarp tų tiesių.

   Nurodymai. 1) Kalbant apie kampą tarp susikertančių tiesių verta pabrėžti, kad tai yra *mažesnysis* iš susidariusių gretutinių kampų (jei nėra nurodyta kitaip).
   2) Svarbiausia čia, kad mokiniai gebėtų paaiškinti, kaip randamas kampas tarp prasilenkiančių tiesių.
   3) Atkreipkite dėmesį į žymenis $\angle(a, b)$, $a \parallel b$, $a \perp b$.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

1–13 uždaviniai yra teminiai, 14–26 — kartojimo.

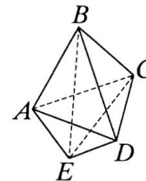
1, 2a

1. a) ABD, ABB_1, ADD_1; b) AA_1B_1, AA_1D_1; c) A_1B_1, DC, D_1C_1; d) AA_1, BB_1, AD, BC; e) AA_1, DD_1, AB, DC; f) DD_1, CC_1, A_1D_1, B_1C_1.

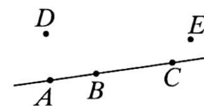
2. Galima nubraižyti 4 plokštumas: ABC, ABD, ACD, BCD.

3. Tiesės AB ir CD negali būti nei lygiagrečios, nei susikertančios, nes per dvi lygiagrečias arba susikertančias tieses galima nubrėžti vienintelę plokštumą. Gautume, kad taškai A, B, C ir D taip pat priklauso tai plokštumai. Tai prieštarauja uždavinio sąlygai.

4. a) ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE;
b) tarkime, kad, pavyzdžiui, taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje. Tuomet plokštumai α, einančiai per taškus A, B ir D, priklausytų ir taškas C (nes plokštumai α priklauso tiesė AB, o tuo pačiu ir šios tiesės taškas C). Gavome prieštarą uždavinio sąlygai. Taigi bet kurie trys taškai iš duotų taškų A, B, C, D ir E nepriklauso vienai tiesei.



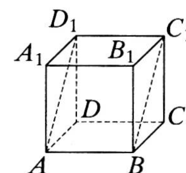
5. Sakykime, kad taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje. Galima išvesti plokštumas ADE, BDE, CDE ir visas plokštumas, einančias per tiesę AC, kuriose nėra nei taško D, nei taško E.



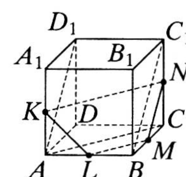
6. a) Iš lygiagrečių tiesių apibrėžimo (dvi tieses vadiname lygiagrečiomis, jei jos yra vienoje plokštumoje ir neturi bendrų taškų) išplaukia, kad egzistuoja plokštuma, kuriai priklauso abi lygiagrečios tiesės. Įrodysime, kad tokia plokštuma yra vienintelė. Tarkime, kad egzistuoja kita plokštuma, kurioje yra abi duotosios tiesės. Pasirinkę vienoje tiesėje du taškus A ir B, o kitoje — tašką C gautume, kad per tris taškus A, B ir C, nesančius vienoje tiesėje, eina dvi skirtingos plokštumos. Tai prieštarauja 1 aksiomai (žr. p. 9 vadovėlyje). Vadinasi, tokia plokštuma vienintelė.
b) Sakykime, kad duota tiesė a ir šiai tiesei nepriklausantis taškas C. Tiesėje a pasirinkime du taškus A ir B. Per taškus A, B ir C, nesančius vienoje tiesėje, eina plokštuma (1 aksioma, p. 9). Šiai plokštumai priklauso tiesė a (2 aksioma, p. 9). Plokštuma, einanti per tiesę a ir tašką C, ir yra vienintelė. Iš tikrųjų, kiekviena plokštuma, kurioje yra tiesė a ir taškas C, eina per tris taškus A, B ir C. Bet per šiuos taškus negalima išvesti dviejų skirtingų plokštumų.

7. a) Taip, nes tiesės AD ir KM yra susikertančios; b) ne, nes tiesės AD ir KL yra prasilenkiančios; c) ne, nes tiesės AD ir LN yra prasilenkiančios; d) taip, nes tiesės LM ir KN yra lygiagrečios ($ML \parallel AB$, nes ML — $\triangle ADB$ vidurinė linija; $NK \parallel AB$, nes NK — $\triangle ABC$ vidurinė linija $\Rightarrow ML \parallel NK$); e) taip, nes taškai K, L, M ir N priklauso vienai plokštumai (žr. d) punktą), tai ir tiesės KM ir NL priklauso tai plokštumai.

8. Kadangi $AB \parallel D_1C_1$, tai taškai A, B, C_1 ir D_1 yra vienoje plokštumoje — pavadinkime ją α. Plokštumos α ir sienų ADD_1A_1 ir BCC_1B_1 susikirtimo atkarpos yra AD_1 ir BC_1. Taigi keturkampis ABC_1D_1 yra plokštumoje α. Keturkampis ABC_1D_1 — lygiagretainis, nes dvi jo priešingos kraštinės AB ir D_1C_1 yra lygios ir lygiagrečios.



9. a) Nubrėžiame kubo sienos $ABCD$ įstrižainę AC. $AC \parallel LM$ ir $LM = \frac{1}{2}AC$, nes LM — $\triangle ABC$ vidurinė linija. $AK \parallel CN$, todėl keturkampis $AKNC$ yra vienoje plokštumoje ir $AKNC$ — lygiagretainis, nes $AK = CN$. Vadinasi, $KN \parallel AC$ ir $KN \parallel LM$.
b) Kadangi $KN \parallel LM$, tai tiesės KN ir LM priklauso vienai plokštumai. Šiai plokštumai priklauso ir tiesės KL ir NM, nes jai priklauso taškai K, N, M ir L. Kadangi $KN = AC = 2LM$, tai tiesės KL ir NM nėra lygiagrečios. Jos susikerta. Jų susikirtimo taškas priklauso plokštumų ABB_1 ir BCC_1 susikirtimo tiesei BB_1.

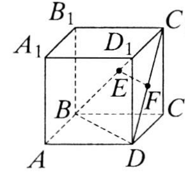


10. *Nurodymas.* Įsitikinkite, kad keturkampio $KLMN$ dvi priešingos kraštinės yra lygios ir lygiagrečios.

11. a) AA_1 ir BC; AA_1 ir B_1C_1; BB_1 ir AC; BB_1 ir A_1C_1; CC_1 ir AB; CC_1 ir A_1B_1;
b) AB ir SC; AB ir SD; BC ir SA; BC ir SD; CD ir SA; CD ir SB; AD ir SB; AD ir SC.

12. a) 90°; b) 0°; c) 90°; d) 45°; e) 45°; f) ≈ 65°.

13. a) 1) 0°, nes $A_1C_1 \parallel AC$;
2) 60°, nes $\triangle A_1C_1D$ — lygiakraštis;
3) 90°, nes kampas tarp A_1C_1 ir BD lygus kampui tarp A_1C_1 ir B_1D_1, o $A_1C_1 \perp B_1D_1$ (kvadrato įstrižainės);
4) $\triangle AA_1C_1$ — status. Tegul $AA_1 = a$. Tada $A_1C_1 = a\sqrt{2}$; $\frac{AA_1}{A_1C_1} = $
$= \operatorname{tg}(\angle AC_1A_1) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$; $\angle AC_1A_1 \approx 35°$;
5) kampas tarp B_1D ir AA_1 lygus kampui tarp B_1D ir BB_1; $\frac{BD}{BB_1} = $
$= \operatorname{tg}(\angle BB_1D) = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \approx 1{,}414$; $\angle BB_1D \approx 55°$.
b) Nagrinėkime $\triangle BC_1D$. EF — $\triangle BC_1D$ vidurinė linija, nes $BE = EC_1$, $DF = FC_1$. Tada $EF \parallel BD$. Kadangi $BD \parallel B_1D_1$, tai $EF \parallel B_1D_1$. Kadangi kampas tarp A_1C_1 ir EF lygus kampui tarp A_1C_1 ir B_1D_1, o $A_1C_1 \perp B_1D_1$, tai $A_1C_1 \perp EF$.



14. a) $V = 80\pi$ dm^3, $S_{pav} = 72\pi$ dm^2; b) $S_{šon} = 15\pi$ m^2, $P = 16$ m.

15. a) 15; b) 36; c) 0,8; d) 0,6.

16. a) $[-3; 4]$; b) $(-\infty; -4)$, $(1; +\infty)$.

17. -6 ir -10; 3 ir 7.

18. 2 km/h.

19. a) $\frac{4+x}{x^3}$; b) $\frac{2a^2}{b^2}$; c) $\frac{a^2}{2b}$; d) $\frac{2x-3}{x(x-1)}$.

20. a) $(-1{,}5; 2{,}5)$, $(-1; 2)$; b) $(-6; 8)$, $(3; -1)$.

21. a) Funkcija $y = h(x)$ yra lyginė, o funkcija $y = f(x)$ — nelyginė;
b) $g(2) = 1$, $h(0) = -3$, $f(-4) = -3$;
c) $E(f) = [-3; 3]$, $E(g) = [-5; 1{,}5]$, $E(h) = [-3; 2]$;
d) $f(x) > 0$, kai $0 < x \leqslant 4$; $g(x) \leqslant 0$, kai $-4 \leqslant x \leqslant 0$; $h(x) < 0$, kai $-2 < x < 2$.

22. $\frac{5}{36}$.

23. a) $A(6; -3)$; b) $2\sqrt{17}$.

24. a) 1173 Lt; b) 304,59 Lt; c) 833,22 Lt.

25. a) 8 cm, 8 cm; b) 10 cm, 10 cm.

26. Kadangi per parą žadintuvas vėluoja 8 minutėmis, tai per pusę paros (nuo 20 val. iki 8 val.) jis vėluos 4 minutėmis. Todėl minutinę rodyklę reikia pasukti į priekį 4 minutėmis.

8.2. Tiesė ir plokštuma erdvėje. Kampas tarp tiesės ir plokštumos

Skyrelio pavadinimas nusako pagrindinį tikslą — išsiaiškinti, kokia gali būti tiesės ir plokštumos tarpusavio padėtis ir kaip rasti kampą tarp tiesės ir plokštumos.

Pakartoti:

kas yra pasviroji, pasvirosios projekcija plokštumoje ir kaip tą projekciją rasti;
geometrijos sąvokos „požymis" prasmę.

Išmokti:

kokia gali būti tiesės ir plokštumos tarpusavio padėtis;
kaip rasti kampą tarp pasvirosios ir plokštumos;
tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymius;
kada tiesė vadinama statmena plokštumai;
tiesės ir plokštumos statmenumo požymį;
trijų statmenų teoremą.

Šiame skyrelyje:

1. Nagrinėjama, kokia gali būti tiesės ir plokštumos tarpusavio padėtis.

   Nurodymai. 1) Siekite, kad visi mokiniai žinotų galimas tiesės ir plokštumos tarpusavio padėtis, mokėtų jas pavaizduoti, erdvinių kūnų modeliuose ir brėžiniuose nurodytų atitinkamų pavyzdžių.
   2) Iš trijų tiesės ir plokštumos tarpusavio padėties atvejų šiame skyrelyje svarbiausias yra tas, kai tiesė kerta plokštumą (tai nagrinėjama 18–19 puslapiuose).

2. Pateikiami tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymiai.

   Nurodymai. 1) Ne visada yra paprasta nustatyti, kokia yra tiesės padėtis plokštumos atžvilgiu. Todėl verta mokiniams pabrėžti, kad:
   - jei žinoma, kad du tiesės taškai priklauso plokštumai, tai ta tiesė yra plokštumoje (2 aksioma);
   - jei žinoma, kad yra vienintelis tiesės taškas, priklausantis plokštumai, tai ta tiesė kerta plokštumą (pagal apibrėžimą);

   ir pasakyti, kad nustatyti, ar tiesė yra lygiagreti plokštumai, dažnai padeda vadovėlyje pateikti požymiai. Pirmojo požymio įrodymas pateiktas 32 pratime, o antrojo požymio įrodymas galėtų būti toks: *Sakykime, kad* $b \nparallel a$ *ir* $b \cap a = A$. *Tada* $A \in a$ *ir* $a \in \alpha$. *Vadinasi,* $a \nparallel \alpha$, *— prieštara.*
   2) Tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymių su silpnesniais mokiniais galima ir nenagrinėti.

3. Nagrinėjamas atvejis, kai tiesė kerta plokštumą. Čia išskiriami atvejai, kai tiesė:
   1) yra statmena plokštumai;
   2) yra pasvira plokštumai.

   Nurodymas. Svarbu, kad mokiniai suprastų, kokia tiesė vadinama statmena plokštumai. Čia galima aptarti su mokiniais prie apibrėžimo pateiktą brėžinį. Pirmiausia galima paklausti mokinių, kokia yra tiesės a ir tiesių esančių plokštumoje α (pvz., b, c) tarpusavio padėtis ir prisiminti, kaip rasti kampą tarp prasilenkiančių tiesių. Po to galima pastebėti, kad patikrinti, ar visos plokštumõs α tiesės yra statmenos tiesei a praktiškai yra neįmanoma ir pateikti tiesės ir plokštumos statmenumo požymį. Šio požymio įrodymas yra gana sudėtingas (žr., pavyzdžiui, Geometrija 10–12. Kaunas, Šviesa, 1994, p. 36).

4. Nagrinėjamas kampas tarp tiesės ir plokštumos:
   1) aptariami ypatingi atvejai, t. y. pasakoma, kam lygus kampas, kai tiesė yra lygiagreti plokštumai ir kai tiesė yra plokštumoje bei kai tiesė yra statmena plokštumai;
   2) pateikiamas apibrėžimas, ką laikysime kampu tarp pasvirosios ir plokštumos;
   3) pateikiamas algoritmas, remiantis kuriuo patogu ieškoti kampo tarp pasvirosios ir plokštumos.

   Nurodymas. Siekite, kad šį algoritmą suprastų ir mokėtų nusakyti žodžiais bei pavaizduoti brėžiniu visi mokiniai. Tai pati svarbiausia šio skyrelio vieta.

5. Pateikiama trijų statmenų teorema.

   Nurodymas. Šią teoremą nagrinėkite tik su stipriausiais mokiniais.
   Pastaba. Literatūroje kartais trijų statmenų teorema laikomas teiginys, atvirkštinis knygoje pateiktam teiginiui. Nėra didelio skirtumo, kurį teiginį laikysime tiesioginiu, kurį — atvirkštiniu. Beje, kartais ir abu tie teiginiai vadinami trijų statmenų teorema.

Šiai temai skirti 27–48 uždaviniai, kiti — kartojimo.

2b,c–11

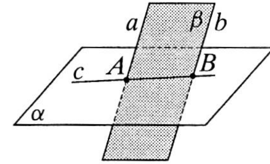
27. a) AB, BC, CD, DA; b) SA, SB, SC, SD; c) BC, CD; d) AB, BC, CD, AD.

28. a) A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1; b) CD, DD_1, D_1C_1, C_1C; c) AA_1, BB_1, CC_1, DD_1; d) AD, A_1D_1, BC, B_1C_1.

29. a) Neteisingai; b) teisingai.
Plokštumos α ir keturkampio $ABCD$ plokštumos sankirta yra tiesė.

30. a) Neteisingai; b) teisingai.
Tiesės AB ir CD yra vienoje plokštumoje. Jos nėra lygiagrečios, todėl jos turi kirstis, o ne prasilenkti.

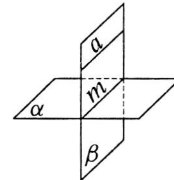
31. *Duota*: $a \parallel b$, $a \cap \alpha = A$.
Įrodyti: tiesė b kerta plokštumą α.
Įrodymas. Per tieses a ir b nubrėžkime plokštumą β. Plokštuma β ir plokštuma α yra skirtingos, nes tiesė a nepriklauso plokštumai α. Kadangi dvi skirtingos plokštumos α ir β turi bendrą tašką A, tai jos kertasi tiese c (žr. 3 aksioma, p. 9). Tiesė c yra plokštumoje β ir kerta tiesę a, tai ji kirs ir tiesei a lygiagrečią tiesę b. Tiesių c ir b susikirtimo tašką pažymėkime B. Kadangi $c \subset \alpha$, tai $B \in \alpha$. Vadinasi, taškas B yra tiesės b ir plokštumos α bendras taškas.
Įrodysime, kad tiesė b ir plokštuma α neturi kitų bendrų taškų. Bet kuris tiesės b ir plokštumos α taškas priklausytų ir plokštumai α, ir plokštumai β, t. y. jų susikirtimo tiesei c. Kadangi tiesės b ir c turi tik vieną bendrą tašką B, tai šis taškas yra vienintelis priklausantis ir tiesei b, ir plokštumai α. Taigi tiesė b kerta plokštumą α.



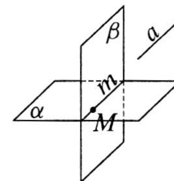
32. *Pastaba*. Reikėtų pabrėžti, kad tiesė l *nėra* plokštumoje α.

a) *Pastaba*. Pavyzdyje pateiktame įrodyme yra korektūros klaida. Trečias nuo galo sakinys turi būti toks: „Bet tada tiesės a ir $\underline{l}$ susikerta, ..."
Įrodymas (*II būdas*). Tarkime priešingai, kad tiesė l kerta plokštumą α. Tada remiantis 31 uždavinyje įrodyta teorema tiesė a taip pat kerta plokštumą α. Tačiau $a \subset \alpha$. Gavome prieštarą. Vadinasi, tiesė l negali kirsti plokštumos α. Ji yra lygiagreti plokštumai α.

b) *Duota*: $a \parallel \alpha$, $a \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = m$.
Įrodyti: $a \parallel m$.
Įrodymas. $a \subset \beta$ ir $m \subset \beta$ ir tiesės a ir m nesikerta (jei tiesės a ir m kirstųsi, tai tiesė a kirstų plokštumą α, bet taip būti negali, nes duota, kad $a \parallel \alpha$). Vadinasi, $a \parallel m$.

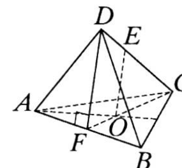


c) *Duota*: $\alpha \cap \beta = m$, $a \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$.
Įrodyti: $a \parallel m$.
Įrodymas. Tiesėje m pažymėkime tašką M. Per tiesę a ir tašką M nubrėžkime plokštumą γ. Ši plokštuma kirs ir plokštumą α, ir plokštumą β tiesėmis, lygiagrečiomis tiesei a (žr. b) punktą). Kadangi abi šios tiesės eina per tašką M, o per šį tašką galima išvesti tik vieną tiesę, lygiagrečią tiesei a, tai tos abi tiesės sutampa ir priklauso plokštumoms α ir β, t. y. sutampa su tiese m. Taigi $a \parallel m$.



33. a) *Nurodymas*. Nubrėžkite sienos ADD_1A_1 įstrižainę AD_1 ir pastebėkite, kad MN — $\triangle AB_1D_1$ vidurinė linija. Po to remkitės tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymiu (1, žr. p. 17);
b) 5 cm.

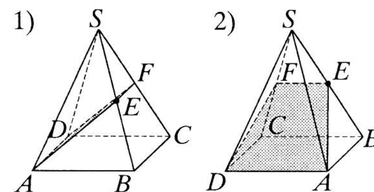
34. a) *Duota*: $ABCD$ — taisyklingoji trikampė piramidė, ABC — pagrindas (lygiakraštis trikampis), O — $\triangle ABC$ pusiaukraštinių susikirtimo taškas, $DE = 5\,\text{cm}$, $EC = 10\,\text{cm}$.
Įrodyti: $OE \parallel DAB$.
Įrodymas. $\frac{CE}{CD} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, $\frac{CO}{CF} = \frac{2}{3}$ (trikampio pusiaukraštinių savybė), todėl $\frac{CE}{CD} = \frac{CO}{CF} \Rightarrow OE \parallel DF$ (taikome atvirkštinę Talio teoremą). Remdamiesi tiesių lygiagretumo požymiu (1, žr. p. 17) gauname, kad $OE \parallel DAB$;
b) $AB = 18\,\text{cm}$ (duota), $AD = DC = DE + EC = 5 + 10 = 15\,(\text{cm})$, todėl iš stačiojo trikampio AFD pagal Pitagoro teoremą gauname:
$DF = \sqrt{AD^2 - AF^2} = \sqrt{15^2 - (\frac{18}{2})^2} = 12\,(\text{cm})$. Tada $\frac{EO}{DF} = \frac{2}{3}$ (taikome Talio teoremos išvadą) ir $EO = \frac{2 \cdot 12}{3} = 8\,(\text{cm})$.



35. *Nurodymas.* MN — $\triangle ABC$ vidurinė linija.

36. *Nurodymas.* $AC \parallel EF$, nes keturkampis $AEFC$ — lygiagretainis ($AE \parallel CF$, $AE = CF$).

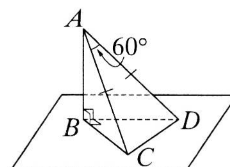
37. Plokštuma ADE su siena SAB turi du bendrus taškus A ir E. Vadinasi, $ADE \cap SAB = AE$. Kadangi $AD \parallel BC$, tai $AD \parallel SBC$. Plokštumų ADE ir SBC susikirtimo tiesė yra lygiagreti tiesei AD (2-as tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymis). Taigi per tašką E plokštumoje SBC brėžiame tiesę EF, lygiagrečią tiesei BC. Plokštuma ADE sieną SDC kirs tiese DF. Trapecija $AEFD$ — piramidės $SABCD$ pjūvis plokštuma ADE.
Pastaba. Nubraižius duotos piramidės pjūvį plokštuma ADE (žr. 1) brėžinį paraštėje) matome, kad brėžinys nėra vaizdus, todėl patartume pirmiausia piramidę pasukti, o tada braižyti pjūvį (žr. 2) brėžinį).



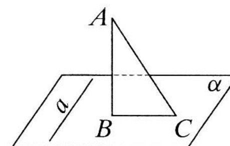
38. 7 dm. *Nurodymas.* $BO \perp AC$ (duota), $OA \perp AC$ (apskritimo liestinės savybė) $\Rightarrow AC \perp AOB \Rightarrow AC \perp AB$.

39. 13 cm, $\sqrt{208}$ cm, $\sqrt{233}$ cm.

40. a) Kadangi $CA = AD$, tai $\triangle CAD$ — lygiašonis. Kadangi $\angle CAD = 60°$, tai $\triangle CAD$ — lygiakraštis. Tada $CD = CA = AD = 4$ dm. $BC = BD$ (lygių pasvirųjų projekcijos yra lygios), tai $\triangle CBD$ — status lygiašonis. Tada $2BC^2 = CD^2$, $2BC^2 = 4^2$, $BC^2 = 8$; $AB^2 = AC^2 - BC^2 = 4^2 - 8 = 8$, $AB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ dm.
Pastaba. Kad lygių pasvirųjų projekcijos yra lygios, galima įsitikinti remiantis trikampių lygumo požymiu (pagal įžambinę ir statinį).
b) $2\sqrt{2}$ m. *Nurodymas.* Kadangi pasvirosios su statmeniu sudaro 60° kampus, tai kampas tarp pasvirosios ir plokštumos lygus 30°. Remdamiesi prieš 30° kampą esančio statinio savybe apskaičiuokite pasvirosios ilgį.

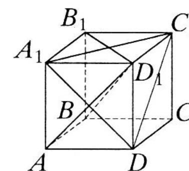


41. *Duota:* $a \subset \alpha$, $AB \perp \alpha$, AC — pasviroji, BC — pasvirosios projekcija, $a \perp BC$.
Įrodyti: $a \perp AC$.
Įrodymas. $AB \perp a$, nes $AB \perp \alpha$; $BC \perp a$ — duota, todėl $a \perp ABC$ (tiesės ir plokštumos statmenumo požymis). Vadinasi, $a \perp AC$, nes a statmena bet kuriai plokštumos ABC tiesei.



42. a) Norint įrodyti, jog $A_1 \in BE \perp CD$, reikia įsitikinti, kad $BA_1 \perp CD$. Kadangi $AA_1 \perp BCD$ (duota), tai $AA_1 \perp CD$; $AB \perp CD$ (duota), tai $CD \perp ABA_1$. Vadinasi, $CD \perp BA_1$. Taigi $A_1 \in BE$.
b) $AE \subset ABA_1$, tai $CD \perp AE$. Taigi AE — $\triangle ACD$ aukštinė.

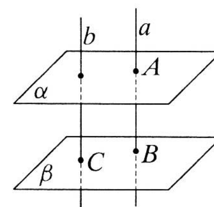
43. Nagrinėkime plokštumą BB_1D_1. $A_1C_1 \perp BB_1D_1$, nes $A_1C_1 \perp B_1D_1$ ir $A_1C_1 \perp BB_1$. Vadinasi, $A_1C_1 \perp BD_1$. $A_1D \perp ABD_1$, nes $A_1D \perp AD_1$ ir $A_1D \perp AB$. Todėl $A_1D \perp BD_1$. Įrodėme, kad tiesė BD_1 yra statmena dviem susikertančioms tiesėms A_1C_1 ir A_1D. Vadinasi, tiesė BD_1 yra statmena ir plokštumai A_1C_1D.

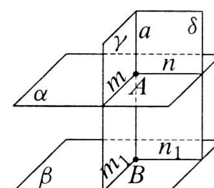


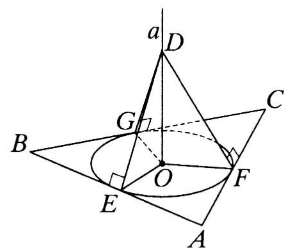
44. *Nurodymas.* Įsitikinkite, kad $BD \perp AOE$.

45. *Nurodymas.* Įsitikinkite, kad $AB \perp CDE$.

46. *Pastaba.* Šį uždavinį spręskite vėliau, kai kitame skyrelyje išsiaiškinsite dviejų plokštumų tarpusavio padėtis. Geriausiai jį tiktų spręsti po 60 uždavinio.
Duota: $\alpha \parallel \beta$, $a \perp \alpha$.
Įrodyti: $a \perp \beta$.
Įrodymas. Pirmiausia reikia įsitikinti, kad tiesė a, kertanti plokštumą α, kerta ir plokštumai α lygiagrečią plokštumą β. Tuo tikslu per bet kurį plokštumos β tašką C nubrėžiame tiesei a lygiagrečią tiesę b. Kadangi tiesė a kerta plokštumą α, tai ir tiesė b kerta plokštumą α (žr. 31 uždavinį). Vadinasi, tiesė b kerta plokštumą β, bet nėra joje (jei tiesė b būtų plokštumoje β, tai plokštumos α ir β turėtų bendrą tašką, tačiau $\alpha \parallel \beta$). Taigi tiesė a, lygiagreti tiesei b, taip pat kerta plokštumą β. Pažymėkime $a \cap \beta = B$. Per tiesę a nubrėžkime dvi plokštumas γ ir δ. Šios dvi plokštumos su plokštuma α kirsis tiesėmis m ir n, o su plokštuma β — tiesėmis m_1 ir n_1. Kadangi $\alpha \parallel \beta$, tai $m \parallel m_1$, $n \parallel n_1$. Kadangi $a \perp \alpha$, tai $\angle(a, m) = \angle(a, n) = 90°$. Tada $\angle(a, m_1) = \angle(a, n_1) = 90°$. Vadinasi, $a \perp \beta$.







47. *Duota*: O — į $\triangle ABC$ įbrėžto apskritimo centras, $a \perp ABC$.
Įrodyti: $DE = DF = DG$.
Įrodymas. Įbrėžtinio apskritimo ir trikampio ABC lietimosi taškus pažymėkime E, F ir G. Tada $OE = OF = OG$ (apskritimo spinduliai) ir $OE \perp AB$, $OF \perp AC$, $OG \perp BC$ (apskritimo liestinės savybė). Tiesėje a pasirinkime bet kurį tašką D ir nubrėžkime atkarpas DE, DF ir DG. Pagal atvirkštinę trijų statmenų teoremą turime: $DE \perp AB$, $DF \perp AC$, $DG \perp BC$. Taigi DE, DF ir DG — taško D atstumai iki trikampio ABC atitinkamų kraštinių. Kadangi $OE = OF = OG$, tai $DE = DF = DG$ (jei lygios pasvirųjų projekcijos, tai lygios ir pačios pasvirosios).

48. a) 2,5 dm. *Nurodymas*. Remkitės 47 uždavinyje įrodytu faktu.
b) *Pastaba*. Vadovėlyje pateiktą nurodymą reikia pakoreguoti — galima remtis atvirkštine trijų statmenų teorema.
Atsakymas. 48 cm ir 60 cm.

49. a) $a = 12$, $b = 16$; b) 96; c) 0,6; d) 0,75.

50. a) $x < -2$; b) $-2 \leqslant x < 6$.

51. 13 cm.

52. a) -9; $\frac{1}{2}$; b) -4; 4.

53. a) $9\sqrt{10}$; b) $18\sqrt{15}$.

54. 600.

55. $AB = \sqrt{61}$; $C(-6; -2{,}5)$.

56. a) 140 Lt, 145,8 Lt; b) 60 Lt, 54,2 Lt; c) 30%, 27,1%.

57. a), b) — antradienis. *Nurodymas*. 1001 para — 143 savaitės.

8.3. Dviejų plokštumų tarpusavio padėtis. Kampas tarp plokštumų

Kaip ir ankstesniuose šio skyriaus skyreliuose, taip ir šiame pagrindinį tikslą nusako pavadinimas, t. y. jame numatyta panagrinėti dviejų plokštumų tarpusavio padėtis ir išmokyti nustatyti kampą tarp susikertančių plokštumų.
Tiesa, skyrelio struktūra ir turinys nėra paprasti. Skyrelyje daug naujų terminų: pusplokštumė, dvisienis kampas, dvisienio kampo sienos, briauna, tiesinis kampas. Bet su silpnesniais mokiniais nebūtina gilintis į visas subtilybes, o pakanka pasiekti pagrindinį tikslą.

Pakartoti:
ką vadiname kampu tarp susikertančių tiesių bei kuo ypatingi kryžminiai kampai;
kad tiesė, esanti plokštumoje, ją dalija į dvi pusplokštumes.

Išmokti:
kokia gali būti dviejų plokštumų tarpusavio padėtis;
kaip rasti kampą tarp susikertančių plokštumų;
plokštumų lygiagretumo požymį;
plokštumų statmenumo požymį.

Šiame skyrelyje:

1. Nagrinėjama, kokia gali būti dviejų plokštumų tarpusavio padėtis.
   Nurodymai. 1) Svarbiausia, kad mokiniai suprastų, jog dvi skirtingos plokštumos gali kirstis arba būti lygiagrečios, gebėtų nurodyti tokių plokštumų pavyzdžių modeliuose, mokėtų jas nubraižyti.
   2) Dar kartą akcentuokite, kad jei dvi plokštumos kertasi, tai jos turi bendrą tiesę (3 aksioma); analogiškai, — jei dvi tiesės kertasi, tai jos turi bendrą tašką. Apskritai, aiškinant šią temą patogu remtis analogija su dviem plokštumos tiesėmis.
   3) Atsakydami į užduoties b) punktą mokiniai gali nepastebėti plokštumos ADC_1B_1.
2. Pateikiamas plokštumų lygiagretumo požymis.
   Nurodymas. Su silpnesniais mokiniais šio požymio galima ir nenagrinėti, o iš karto paaiškinti, kaip rasti kampą tarp susikertančių plokštumų.
3. Įvedama dvisienio kampo sąvoka.
   Nurodymas. Su silpnesniais mokiniais galima apsieiti ir be šios sąvokos.
4. Pateikiamas algoritmas, kaip rasti dvisienio kampo didumą.
   Nurodymas. Su silpniausiais mokiniais galima apsieiti ir be sąvokos *tiesinis kampas.*
5. Pasakoma, ką vadinsime kampu tarp susikertančių plokštumų.
   Nurodymas. Čia vėl patogu remtis analogija su susikertančių tiesių kampu.
6. Pasakoma, kokios plokštumos vadinamos statmenomis.
7. Pateikiamas plokštumų statmenumo požymis.
   Nurodymas. Su silpnesniais mokiniais šio požymio galima ir nenagrinėti.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

58–70 uždaviniai yra teminiai, o kiti — kartojimo.

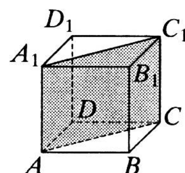
12–15, 17–23, 28, 29, 33, 34, 62, 65–78

58. a) $ABCD$ ir $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1 ir DCC_1D_1, ADD_1A_1 ir BCC_1B_1;
b) $AA_1 \parallel DD_1$; c) ABB_1 ir DCC_1, ADD_1 ir BCC_1, ADC ir $A_1D_1C_1$; $ABB_1 \cap B_1A_1D = A_1B_1$, $DCC_1 \cap B_1A_1D = DC$, $ADD_1 \cap B_1A_1D = A_1D$, $BCC_1 \cap B_1A_1D = B_1C$, $ADC \cap B_1A_1D = DC$, $A_1D_1C_1 \cap B_1A_1D = A_1B_1$.

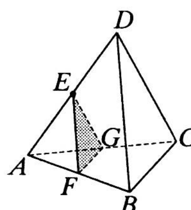
59. a) $a \parallel b$, a ir b susikerta, a ir b sutampa; b) $a \parallel b$, a ir b — prasilenkiančios.

60. a) *Įrodymas.* Tarkime priešingai: plokštuma kerta dvi lygiagrečias plokštumas α ir β, bet tų plokštumų susikirtimo tiesės nėra lygiagrečios. Tada tos tiesės kertasi. Jų susikirtimo taškas priklauso ir plokštumai α, ir plokštumai β. Vadinasi, plokštumos α ir β kertasi. Tačiau duota, kad $\alpha \parallel \beta$. Gavome prieštarą. Vadinasi, plokštumų susikirtimo tiesės yra lygiagrečios.

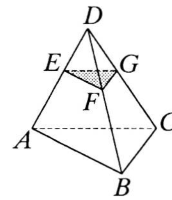
61. a) ABB_1 ir DCC_1, ADD_1 ir BCC_1, ABC ir $A_1B_1C_1$.
b) Kadangi pjūvis ACC_1 plokštumą ABC kerta tiese AC, tai plokštumai ABC lygiagrečią plokštumą $A_1B_1C_1$ kirs tiese, lygiagrečia tiesei AC, t. y. tiese A_1C_1. Kadangi taškai A ir A_1 priklauso plokštumai ACC_1, tai tiesė AA_1 taip pat priklausys šiai plokštumai. Stačiakampis ACC_1A_1 — ieškomasis pjūvis.



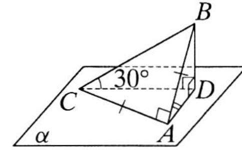
62. 1) Plokštuma DBC kerta plokštumą ABD tiese DB. Plokštuma, lygiagreti plokštumai DBC ir einanti per tašką E, plokštumą ABD kirs tiese, lygiagrečia DB. Taigi per tašką E plokštumoje ABD brėžiame $EF \parallel DB$. Analogiškai nubraižome $EG \parallel DC$. Nubrėžę atkarpą FG ($FG \parallel BC$) gauname ieškomą pjūvį — $\triangle FEG$.
2) 3 cm.



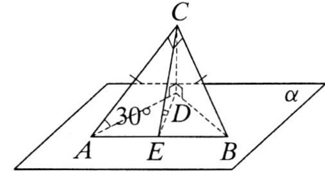
63. Plokštuma, lygiagreti pagrindo plokštumai ABC ir einanti per tašką E, kirs piramidės sienas tiesėmis, atitinkamai lygiagrečiomis pagrindo briaunoms. Taigi per tašką E plokštumoje ADB brėžiame $EF \parallel AB$; plokštumoje ADC brėžiame $EG \parallel AC$. FG priklauso pjūvio plokštumai, todėl $FG \parallel BC$. Pagal Talio teoremos išvadą: $\frac{DE}{DA} = \frac{DF}{DB} = \frac{EF}{AB}$, $\frac{DF}{DB} = \frac{DG}{DC} = \frac{FG}{BC}$, $\frac{DG}{DC} = \frac{DE}{DA} = \frac{EG}{AC} \Rightarrow \frac{EF}{AB} = \frac{FG}{BC} = \frac{GE}{AC}$. Kadangi $AB = BC = CA$, tai $EF = FG = GE$. Kadangi $AD = 25\,\text{cm}$, o $DE : EA = 2 : 3$, tai $DE = 10\,\text{cm}$, $AE = 15\,\text{cm}$. Tada iš lygybės $\frac{DE}{DA} = \frac{EF}{AB}$ gauname: $EF = \frac{10 \cdot 30}{25} = 12\,(\text{cm})$ ir $P_{EFG} = 3EF = 3 \cdot 12 = 36\,(\text{cm})$.



64. a) Ieškomas kampas — $\angle BAD$ ($AB \perp AC$, $AD \perp AC \Rightarrow BD \perp AC$). Iš stačiojo $\triangle BAD$: $\frac{BD}{AB} = \sin(\angle BAD)$. Iš stačiojo $\triangle BDC$: $BD = \frac{1}{2}BC$ (statinio, esančio prieš 30° kampą, savybė). Iš stačiojo lygiašonio $\triangle BAC$: $2AB^2 = BC^2$, $BC = AB\sqrt{2}$. Tada $BD = \frac{1}{2} \cdot AB\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$ ir $\sin(\angle BAD) = \frac{\sqrt{2}AB}{2AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle BAD = 45°$.

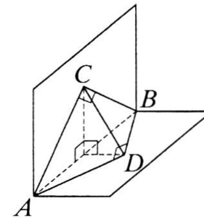


b) Ieškomas kampas — $\angle CED$ ($CE \perp AB$, $ED \perp AB$). Sprendimas analogiškas a) punktui.
Atsakymas. $\angle CED = 45°$.
Nurodymas. Padėkite moksleiviams pasidaryti brėžinį ir gerai išsiaiškinkite, kur yra duotasis kampas, ir kuris kampas yra ieškomasis.



65. a) 3 dm; b) $4\sqrt{3}$ dm.

66. a) ≈ 55°. *Nurodymas.* Remkitės 64 uždavinio brėžiniu ir paaiškinimais.
b) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ cm. *Nurodymas.* Remkitės brėžiniu (žr. dešinėje).



67. a) 45°; b) ≈ 75°.

68. ≈ 53°.

69. ≈ 71°.

70. $2\sqrt{3}$.

71. a) ≈ 12,9 cm, ≈ 27,4 cm; b) ≈ 156 cm^2.

72. a) $(-\infty; -2)$, $(2; +\infty)$; b) $[-2; 2]$; c) $[-4; 0]$; d) $(-\infty; 0)$, $(4; +\infty)$.

73. 27 km/h.

74. $2{,}116 \cdot 10^{-2}$; $2{,}5 \cdot 10^{-2}$.

75. a) $-\frac{4}{29}$; b) $-8{,}2$.

76. a) 2,25; b) $f(x) > 0$, kai $-2 < x < 1$; $f(x) < 0$, kai $x < -2$, $x > 1$; c) $(-\infty; -0{,}5)$; d) $f(x) = -4$, kai $x = -3$, $x = 2$.

77. a) $\frac{4y}{(4y+1)(y+2)}$; b) $\frac{9}{x-3}$.

78. a) hhh, hhs, hsh, shh; b) $\frac{1}{2}$.

79. a) 162 Lt;
b) 24,71 Lt. *Nurodymas.* PVM mokestis skaičiuojamas nuo kainos be PVM;
c) 172,9 Lt; d) 34,58 Lt; e) 26,28 Lt.

80. a) $|x^2 + x - 6| = x^2 + x - 6$, kai $x^2 + x - 6 \geqslant 0$, t. y. kai $x \leqslant -3$ ir $x \geqslant 2$;
b) $|6x^2 - 5x + 1| = 5x - 6x^2 - 1$, kai $6x^2 - 5x + 1 \leqslant 0$, t. y. kai $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

81. Kadangi trikampio kraštinės ilgis yra didesnis už kitų dviejų kraštinių ilgių skirtumą, bet mažesnis už jų ilgių sumą, tai $5 - 1 < x < 5 + 1$ ir $4 < x < 6$. Taigi trečios trikampio kraštinės ilgis yra 5 cm.

Mokiniai jau nuo pradinių klasių vaizdavo erdvinius kūnus popieriaus lape, lentoje (plokštumoje). Daugeliui tai nebuvo lengva išmokti, o kai kuriems mokiniams ir baigiant mokyklą sunku būna pavaizduoti norimą erdvinį kūną.

Šio skyrelio tikslas yra paaiškinti pagrindinius momentus, į kuriuos reikia atkreipti dėmesį vaizduojant erdvinius kūnus.

Apskritai, svarbiausia, kad mokiniai gebėtų spręsdami uždavinius pasidaryti tinkamą, vaizdų brėžinį ir taip palengvintų uždavinio sprendimą.

Šiame skyrelyje siekiama supažindinti su teoriniais statmenojo projektavimo pagrindais. Būtų gerai, kad visi mokiniai suprastų, ką vadiname statmenuoju projektavimu, ir mokėtų nusakyti, kaip rasti figūros statmenąją projekciją plokštumoje.

Taip pat skyrelyje aiškinama, kaip praktikoje yra vaizduojami įvairūs kūnai. Dažnai patogu būna braižyti ne erdvinio kūno vaizdą, o tik jo vaizdus iš priekio, iš viršaus ir iš šono. Ši medžiaga pastaraisiais metais gana aktuali, nes mokykloje beveik nebedėstoma braižyba.

Nurodymai. 1) Šio skyrelio teorinės medžiagos galima nenagrinėti iš viso, galima liepti mokiniams teorinę medžiagą pasiskaityti savarankiškai. Bet šio skyrelio uždavinius, atitinkančius teorinę dalį, t. y. 82–89, rekomenduotume išspręsti visus.

2) Būtinai supažindinkite mokinius su kūno statmenųjų projekcijų (iš viršaus, iš priekio, iš šono) braižymu (nors ta medžiaga vadovėlyje pateikta kaip neprivaloma).

Pakartoti:

ką vadiname pasvirosios projekcija plokštumoje ir kaip ją rasti;

kokie dydžiai vadinami proporcingais;

Pitagoro teoremą;

plokštumos koordinačių sistemą.

Išmokti:

rasti taško, tiesės, atkarpos, trikampio, keturkampio projekciją plokštumoje;

kas yra kūno statmenosios projekcijos (horizontalioji, frontalioji, profilinė).

Šiame skyrelyje:

1. Pateikiami kelių žinomų erdvinių kūnų brėžinių pavyzdžiai. Tuo siekiama kelių dalykų:

   – pakartoti pagrindinėje mokykloje nagrinėtus erdvinius kūnus; todėl čia silpnesniems mokiniams vertėtų liepti pavaizduoti ir kitus anksčiau nagrinėtus kūnus, pavyzdžiui, stačiakampį gretasienį, pasvirąją trikampę prizmę, keturkampę piramidę, ritinį, rutulį;

   – atkreipti mokinių dėmesį, kad vaizduojant erdvinius kūnus plokštumoje tenka kai kuriuos jų elementus vaizduoti nenatūralaus dydžio; čia yra proga pakartoti žinomas plokštumos figūras: trikampį, kvadratą, stačiakampį, lygiagretainį, taisyklingąjį šešiakampį, apskritimą.

   Pastaba. Mokiniams gali būti negirdėta elipsės sąvoka. Todėl mokytojas galėtų ją apibūdinti plačiau.

   Nurodymas. Kalbant apie pavaizduotus kūnus verta mokiniams pabrėžti, kad nematomos linijos brėžinyje vaizduojamos brūkšneline linija.

2. Įvedama erdvės stačiakampės koordinačių sistemos sąvoka.

3. Pavyzdžiais (1–4) aiškinama, kaip galima braižyti skyrelio pradžioje pavaizduotus kūnus.

   Nurodymas. Šuos pavyzdžius galima liepti mokiniams išsinagrinėti savarankiškai namuose.

4. Pilkajame fone supažindinama su vadinamojo *statmenojo* (ortogonaliojo) *projektavimo* pagrindinėmis sąvokomis ir savybėmis.

   Nurodymai. 1) Mokiniams galima pabrėžti, kad braižant kūno vaizdą pirmiausia reikia pasirinkti plokštumą, kurioje tą vaizdą braižysime (vadinamąją projekcijų plokštumą) bei kryptį, pagal kurią kiekvienam projektuojamojo kūno taškui rasime atitinkantį tašką projekcijų plokštumoje. Kai kalbama apie statmenąjį projektavimą, tai reiškia, kad projektavimo kryptis pasirenkama statmena projekcijų plokštumai.

   2) Vadovėlyje pateiktos statmenojo projektavimo 1 ir 2 savybės neturėtų būti sunkiai suvokiamos mokiniams. Daugiau dėmesio galima skirti 3 savybės nagrinėjimui.

   3) Apibendrinant statmenojo projektavimo teoriją reikėtų pabrėžti, kad braižant erdvinius kūnus:

   - lygiagrečias vaizduojamojo kūno atkarpas reikia vaizduoti lygiagrečiomis atkarpomis (projektuojant išlaikomas *lygiagretumas*);
   - vaizduojamųjų atkarpų ilgiai gali pasikeisti, bet negali pasikeisti atkarpų, esančių vienoje tiesėje arba lygiagrečiose tiesėse, ilgių santykiai (projektuojant išlaikomi tokių atkarpų *ilgių santykiai*).
   - projektuojant kampai gali keistis.

5. Pateikiamas išspręstas uždavinys.

   Nurodymas. Stipresniems mokiniams rekomenduokite uždavinio 2) dalį pabandyti išspręsti savarankiškai.

6. Trumpai aiškinama, kaip braižomos trys kūno statmenosios projekcijos ir gaunamas *epiūras*.

   Nurodymas. Šią medžiagą galima nagrinėti ir su visais mokiniais (ypač jei yra laiko).

82–89 uždaviniai yra teminiai, o 100–109 — kartojimo. 16

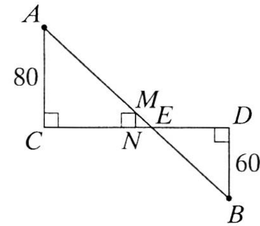
82. 12 cm; $AB \not\perp \alpha$. *Nurodymai.* 1) Sakykime, kad atkarpa AB kerta plokštumą α taške O. Tegul $AO = x$ cm. Tada $OB = 15-x$ (cm). Atstumas nuo taško A iki plokštumos α yra $AC = 3$ cm, o nuo taško B iki plokštumos α yra $BD = 6$ cm. $\triangle AOC \backsim \triangle BOD$ pagal du kampus. 2) Jei būtų $AB \perp \alpha$, tai atkarpos galų nuo plokštumos α atstumų suma būtų lygi atkarpos AB ilgiui.

83. Galimi du atvejai:

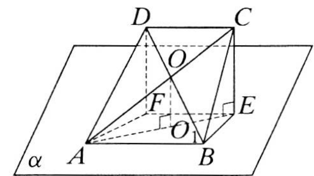
1) atkarpa AB yra vienoje plokštumos α pusėje. Tada atkarpos AB vidurio taškas nuo plokštumos α nutolęs $\frac{80+60}{2} = 70$ (cm) atstumu;

2) atkarpa AB kerta plokštumą α. $\triangle ACE \backsim \triangle BDE$: $\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BD} = \frac{80}{60} = \frac{4}{3}$. Taigi $AE = 4x$, $BE = 3x$. Kadangi $AM = MB = \frac{AB}{2}$, tai $AM = \frac{AE+EB}{2} = \frac{4x+3x}{2} = 3{,}5x$. Tada $ME = AE - AM = 4x - 3{,}5x = 0{,}5x$. $\triangle ACE \backsim \triangle MNE$: $\frac{AC}{MN} = \frac{AE}{ME}$, $MN = \frac{AC \cdot ME}{AE} = \frac{80 \cdot 0{,}5x}{4x} = 10$ (cm). *Pastaba.* Pastebėkite, kad $MN = \frac{AC-BD}{2} = \frac{80-60}{2} = 10$ (cm).

Atsakymas. 70 cm arba 10 cm.



84. 24 cm. *Nurodymas.* Atkarpa AB yra vienoje plokštumos α pusėje, nes statmuo AC yra ilgesnis už atkarpą AB.



85. Iš $\triangle DOC \backsim \triangle BOA$: $\frac{AB}{DC} = \frac{AO}{OC} = \frac{5}{3}$. Taigi $AO = 5x$, $OC = 3x$. Tada $AC = AO + OC = 5x + 3x = 8x$. Iš $\triangle ACE \backsim \triangle AOO_1$: $\frac{AC}{AO} = \frac{CE}{OO_1}$, $OO_1 = \frac{AO \cdot CE}{AC} = \frac{5x \cdot 4}{8x} = 2{,}5$ (cm).

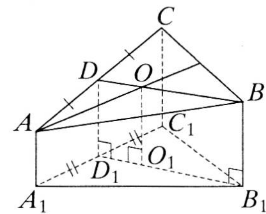
86. 80 cm. *Nurodymas.* Pagal Pitagoro teoremą apskaičiuokite rombo įstrižainių ilgius.

87. *Nurodymas.* Tai sunkus uždavinys. Jį spręskite tik su stipriais moksleiviais.

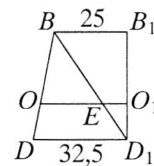
Galimi du atvejai:

1) $\triangle ABC$ yra vienoje plokštumos α pusėje.

a) Sakykime, kad $AA_1 = 4$ dm, $BB_1 = 5$ dm, $CC_1 = 6$ dm. Kadangi $AD = DC$, $A_1D_1 = D_1C_1$, $AA_1 \parallel CC_1$, tai DD_1 — trapecijos A_1ACC_1 vidurinė linija. Tada $DD_1 = \frac{AA_1+CC_1}{2} = \frac{4+6}{2} = 5$ (dm). Keturkampis D_1DBB_1 — stačiakampis, todėl $OO_1 = 5$ dm.

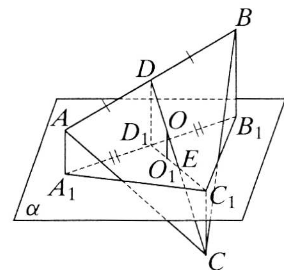


b) Sakykime, kad $AA_1 = 20$ cm, $BB_1 = 25$ cm, $CC_1 = 45$ cm. Analogiškai kaip punkte a) gauname, kad $DD_1 = \frac{20+45}{2} = 32{,}5$ (cm). $\frac{D_1O_1}{O_1B_1} = \frac{1}{2}$ (taikome trikampio pusiaukraštinių savybę). Iš $\triangle BB_1D_1 \backsim \triangle EO_1D_1$ (žr. brėžinį): $\frac{O_1E}{B_1B} = \frac{D_1O_1}{D_1B_1} = \frac{1}{3}$. Tada $O_1E = \frac{BB_1}{3} = \frac{25}{3}$ (cm). Iš $\triangle DBD_1 \backsim \triangle OBE$: $\frac{EO}{D_1D} = \frac{BO}{BD} = \frac{1}{3}$. Tada $EO = \frac{2D_1D}{3} = \frac{2 \cdot 32{,}5}{3} = \frac{65}{3}$ (cm). $O_1O = O_1E + EO = \frac{25}{3} + \frac{65}{3} = 30$ (cm).

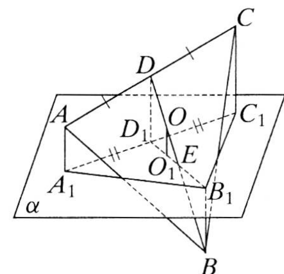


2) Trikampis ABC kerta plokštumą α. Tegul $AA_1 = 4$ dm, $BB_1 = 5$ dm, $CC_1 = 6$ dm. Čia galimi dar trys atvejai:

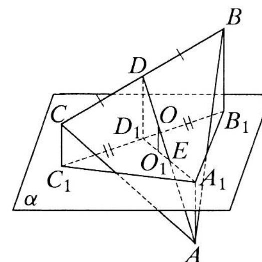
a) 1) taškai A ir B yra vienoje, o taškas C — kitoje plokštumos α pusėje. Tada $DD_1 = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$ (dm). Pusiaukraštinės CD ir plokštumos α susikirtimo tašką pažymėkime E. Taškas O — $\triangle ABC$ pusiaukraštinių susikirtimo taškas. Iš $\triangle DD_1E \backsim \triangle CC_1E$: $\frac{DE}{CE} = \frac{DD_1}{CC_1} = \frac{4{,}5}{6} = \frac{3}{4}$, $DE = \frac{3}{4}CE$. $DE = \frac{3}{7}DC$, $DO = \frac{1}{3}DC$, $OE = DE - DO = (\frac{3}{7} - \frac{1}{3})DC = \frac{2}{21}DC$. Iš $\triangle DD_1E \backsim \triangle OO_1E$: $\frac{OO_1}{DD_1} = \frac{OE}{DE}$, $OO_1 = \frac{OE \cdot DD_1}{DE} = \frac{2}{21} \cdot 4{,}5 \cdot \frac{7}{3} = 1$ (dm).



2) Taškai A ir C yra vienoje, o taškas B — kitoje plokštumos α pusėje. Tada $DD_1 = \frac{4+6}{2} = 5$ (dm). Taigi taškai D ir B yra vienodai nutolę nuo plokštumos α, tik iš skirtingų jos pusių. Vadinasi, taškas E yra pusiaukraštinės BD ir plokštumos α susikirtimo taškas, ir $DE = EB$. Taškas O — $\triangle ABC$ pusiaukraštinių susikirtimo taškas. Iš $\triangle DD_1E \backsim \triangle OO_1E$: $\frac{OO_1}{DD_1} = \frac{OE}{DE}$. $DO = \frac{1}{3}DB$, $DB = 2DE$, todėl $DO = \frac{1}{3} \cdot 2DE = \frac{2}{3}DE$. $OE = DE - DO = DE - \frac{2}{3}DE = \frac{1}{3}DE$; $\frac{OO_1}{5} = \frac{\frac{1}{3}DE}{DE}$, $OO_1 = \frac{5}{3}$ (dm).



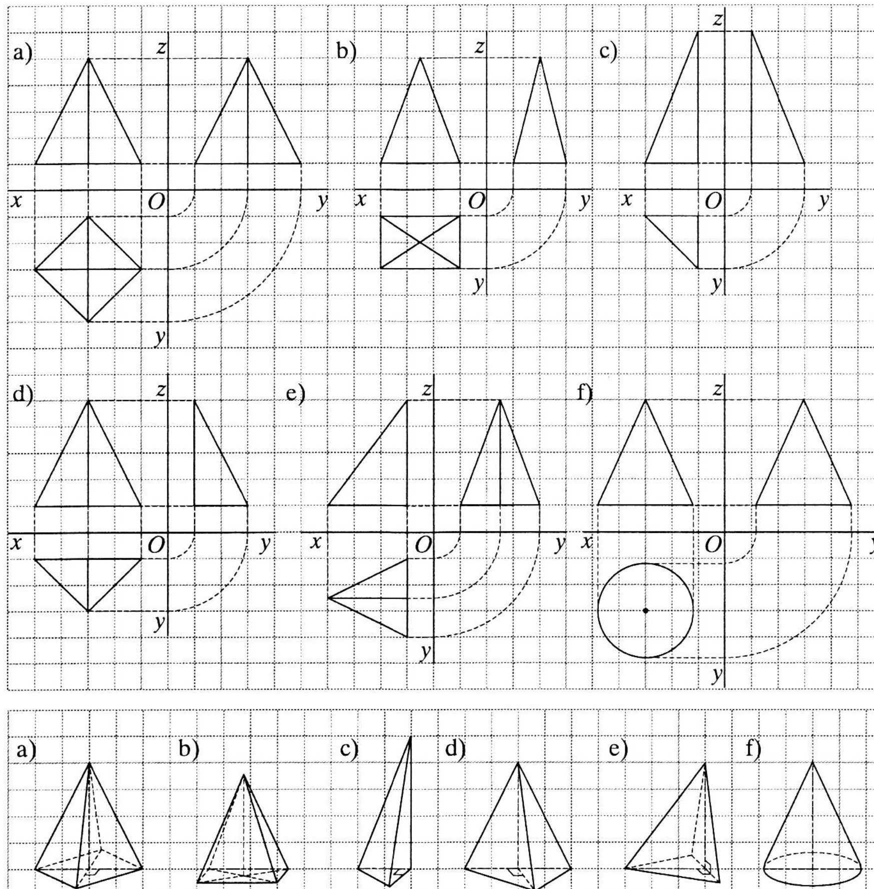
3) Taškai B ir C yra vienoje, o taškas A — kitoje plokštumos α pusėje. Tada $DD_1 = \frac{6+5}{2} = 5{,}5$ (dm). Iš $\triangle DD_1E \backsim \triangle AA_1E$: $\frac{DE}{AE} = \frac{DD_1}{AA_1} = \frac{5{,}5}{4}$, $DE = \frac{5{,}5}{4}AE = \frac{11}{8}AE$; $DE = \frac{11}{19}AD$, $DO = \frac{1}{3}AD$, $OE = DE - DO = (\frac{11}{19} - \frac{1}{3})AD = \frac{14}{57}AD$. Iš $\triangle DD_1E \backsim \triangle OO_1E$: $\frac{OO_1}{DD_1} = \frac{OE}{DE}$, $OO_1 = \frac{14}{57} \cdot 5{,}5 \cdot \frac{19}{11} = \frac{7}{3}$ (dm).



b) Sprendimas analogiškas a) punkto sprendimui. Atstumas nuo $\triangle ABC$ pusiaukraštinių susikirtimo taško iki plokštumos α yra arba lygus nuliui, arba $\frac{40}{3}$ cm, arba $\frac{50}{3}$ cm.

88. 8 cm. *Nurodymas*. Tegul atstumas nuo taško D iki trikampio ABC plokštumos yra DE. Kadangi $AD = BD = CD \Rightarrow AE = EB = EC \Rightarrow E$ — įžambinės AB vidurio taškas.

89. 1)



2) a) $V = 23\,328$; b) $V = 17\,576$; c) $V = \frac{14\,812}{3}$; d) $V = 13\,122$; e) $V = 16\,170$; f) $V = 6400\pi$.

100. a) $[-3; 3]$; b) $(-3; 3)$; c) $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$, $(3; +\infty)$; d) $(-\infty; +\infty)$.

101. $\frac{-9-\sqrt{321}}{2}$ ir $\frac{1-\sqrt{321}}{2}$; $\frac{-9+\sqrt{321}}{2}$ ir $\frac{1+\sqrt{321}}{2}$.

102. a) 1; b) 8.

103. a) $\frac{9}{3x+2}$; b) $\frac{5x+1}{x}$.

104. a) 120; b) $\frac{1}{120}$.

105. a) 30 000 Lt; b) 32 210,2 Lt.

106. a) -4; b) -4; c) 12; d) -2; e) 80.

107. a) $(-1; 1]$, 2; b) $(-\infty; -3)$, $[2; 4)$, $[5; +\infty)$.

108. $3^{100} = (3^2)^{50} = 9^{50} = (9^2)^{25} = 81^{25}$. Skaičių, kurio paskutinis skaitmuo yra 1, keldami laipsniu gausime skaičių, kuris baigiasi skaitmeniu 1.

109. *Nurodymas*. Nuo 1985 m. balandžio 26 d. iki 1986 m. sausio 1 d. yra $4 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 = 249$ dienos. Suskaičiuojame šių metų dienas iki šiandienos. Suskaičiuojame visų pilnų metų dienas (nepamirškite keliamųjų metų). Visų šių dienų suma ir yra atsakymas.

8.5. Nupjautinė piramidė

Šio skyrelio pagrindinis tikslas — supažindinti su nupjautine piramide. Nors skyrelis nėra privalomas, bet pravartu būtų su nupjautine piramide supažindinti *visus* mokinius. Mokytojui reikėtų paaiškinti mokiniams, kaip gaunama nupjautinė piramidė: perpjovę piramidę lygiagrečiai pagrindui, gauname du kūnus — mažesnę piramidę ir vadinamąją nupjautinę piramidę (tai matyti iš vadovėlyje pateiktų brėžinių). Po to visiems mokiniams galima pasiūlyti apskaičiuoti nupjautinės piramidės šoninio paviršiaus plotą ir tūrį, kai žinoma didžiosios ir mažosios piramidžių šoninių paviršių plotai ir tūriai. Dar galima pateikti užduočių, nurodant, pavyzdžiui, didžiosios ir mažosios piramidžių pagrindų plotus bei aukštines ir liepiant apskaičiuoti nupjautinės piramidės tūrį.

Nurodymas. Visus mokinius apskritai siūlytume supažindinti su teorine vadovėlio medžiaga, esančia 41 puslapyje iki antrojo klaustuko imtinai. Visa kita medžiaga skirta stipriems mokiniams.

Pakartoti:

ką vadiname piramide, taisyklingąja piramide;
ką vadiname piramidės aukštine;
kas sudaro piramidės šoninį paviršių, visą paviršių;
kaip apskaičiuoti piramidės tūrį;
koks keturkampis vadinamas trapecija;
kaip apskaičiuoti trikampių ir keturkampių plotus;
kokie trikampiai vadinami panašiais;
trikampių panašumo požymius;
Talio teoremą.

Išmokti:

kaip gaunama nupjautinė piramidė;
iš kokių figūrų sudarytas nupjautinės piramidės šoninis paviršius;
ką vadiname nupjautinės piramidės aukštine;
apskaičiuoti nupjautinės piramidės tūrį.

Šiame skyrelyje:

1. Pateikiamas trikampės piramidės pavyzdys, siūlant mokiniams patiems prisiminti, ką vadiname piramide ir kaip apskaičiuojamas jos tūris.

   Nurodymas. Vertėtų paklausti mokinių, ką vadiname piramidės aukštine.
2. Aiškinama, kaip gaunama nupjautinė piramidė.

   Nurodymas. Tai turėtų gebėti paaiškinti visi mokiniai.
3. Įrodoma, kad nupjautinės trikampės piramidės pagrindai yra panašūs trikampiai.

   Nurodymas. Tai teisinga visoms (ne tik trikampėms) piramidėms.
4. Aiškinama ir formulėmis pateikiama, kaip susiję:
   - nupjautinės piramidės (didžiosios ir mažosios piramidžių) pagrindų plotai;
   - didžiosios ir mažosios piramidžių tūriai;
   - nupjautinės piramidės ir mažosios piramidės tūriai.

   Nurodymas. Nereikia versti mokinius įsiminti ar mokėti įrodyti šias formules, bet daugeliui neturėtų būti sunku įsiminti formules siejančias didžiosios bei mažosios piramidžių pagrindų plotus bei tūrius.
5. Pateikiamas išspręstas 1 uždavinys.

   Nurodymas. Būtų gerai, kad šį uždavinį panagrinėtumėte su daugeliu mokinių.
6. Pateikiamas išspręstas 2 uždavinys.

   Nurodymas. Šį uždavinį nagrinėkite tik su stipriausiais mokiniais.

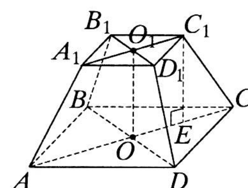
110–121 — teminiai, 122–130 — kartojimo uždaviniai.

24–27, 30–32, 35–42

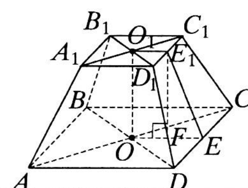
110. $320\,\text{cm}^2$. *Nurodymas.* Sakykime, kad S — piramidės pagrindo plotas. Pagal sąlygą $\frac{S-275}{S} = \left(\frac{3}{8}\right)^2$.

111. $1750\,\text{cm}^3$. *Nurodymas.* Sakykime, kad piramidės aukštinės ilgis yra h. Tada $\left(\frac{h-14}{h}\right)^2 = \frac{54}{150}$.

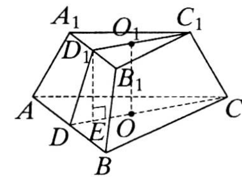
112. Iš stačiojo $\triangle ADC$: $AC = 10\sqrt{2}\,\text{cm}$, $OC = 5\sqrt{2}\,\text{cm}$. Iš stačiojo $\triangle A_1D_1C_1$: $A_1C_1 = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$, $O_1C_1 = \sqrt{2}\,\text{cm}$. $CE = OC - O_1C_1 = 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2}\,(\text{cm})$. Iš stačiojo $\triangle C_1EC$: $CC_1^2 = C_1E^2 + EC^2 = 7^2 + (4\sqrt{2})^2 = 81$, $CC_1 = 9\,\text{cm}$.



113. $OE = \frac{1}{2}AD = \frac{68}{2} = 34\,(\text{cm})$; $O_1E_1 = \frac{1}{2}A_1D_1 = \frac{4}{2} = 2\,(\text{cm})$; $FE = OE - O_1E_1 = 34 - 2 = 32\,(\text{cm})$; $E_1F = OO_1 = 24\,\text{cm}$. Iš stačiojo $\triangle E_1FE$: $E_1E^2 = \sqrt{24^2 + 32^2} = 1600$, $E_1E = 40\,\text{cm}$. $S_{\text{šon}} = 4 \cdot \frac{68+4}{2} \cdot 40 = 5760\,(\text{cm}^2)$, $S_{\text{pav}} = 5760 + 68^2 + 4^2 = 10\,400\,(\text{cm}^2)$.



114. $V = \frac{1}{3}S_{\text{pagr}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 98 \cdot 14 = \frac{1372}{3}\,(\text{cm}^3)$; $\frac{98}{32} = k^2$, $k = \frac{7}{4}$. $V_{\text{nup}} = \frac{k^3-1}{k^3}V = \frac{\left(\frac{7}{4}\right)^3-1}{\left(\frac{7}{4}\right)^3} \cdot \frac{1372}{3} = 372\,(\text{cm})^3$.



115. a) Nupjautinės taisyklingosios piramidės sienos — lygios lygiašonės trapecijos, $AB = 16\,\text{cm}$, $A_1B_1 = 10\,\text{cm}$. Nupjautinės piramidės aukštinė $OO_1 = \sqrt{22}\,\text{cm}$. Norint rasti nupjautinės piramidės šoninio paviršiaus plotą, reikia rasti jos sienos apotemą (trapecijos aukštinę) DD_1. DC — lygiakraščio $\triangle ABC$ aukštinė, todėl $DC = \frac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}\,(\text{cm})$. D_1C_1 — lygiakraščio $\triangle A_1D_1C_1$ aukštinė, todėl $D_1C_1 = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\,(\text{cm})$. $DO = \frac{1}{3}DC = \frac{8\sqrt{3}}{3}\,(\text{cm})$, $D_1O_1 = \frac{1}{3}D_1C_1 = \frac{5\sqrt{3}}{3}\,(\text{cm})$; $DE = DO - D_1O_1 = \frac{8\sqrt{3}}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}\,(\text{cm})$. Iš stačiojo $\triangle D_1ED$: $DD_1^2 = DE^2 + ED_1^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{22})^2 = 25$, $DD_1 = 5\,\text{cm}$. $S_{\text{šon}} = 3 \cdot \frac{AB + A_1B_1}{2} \cdot DD_1 = \frac{3}{2}(16+10) \cdot 5 = 195\,(\text{cm})^2$;
b) $(195 + 89\sqrt{3})\,\text{cm}^2$.

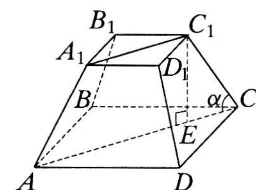
116. *Nurodymas.* Remkitės 115 uždavinio brėžiniu.
$DO = \frac{8\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}$, $D_1O_1 = \frac{5\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}$, $DE = \sqrt{3}\,\text{cm}$. Iš stačiojo trikampio D_1ED: $D_1E^2 = DD_1^2 - DE^2 = 5^2 - (\sqrt{3})^2 = 22$, $D_1E = \sqrt{22}\,\text{cm}$. $V_{\text{nup}} = \frac{1}{3}(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1}) \cdot H = \frac{1}{3}\left(\frac{16^2\sqrt{3}}{4} + \frac{10^2\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{16^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{10^2\sqrt{3}}{4}}\right) \cdot \sqrt{22} = 43\sqrt{66}\,(\text{cm})^3$.

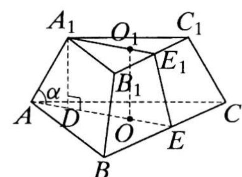
117. *Pastaba.* Sąlygoje yra korektūros klaida. Turėtų būti: „Raskite *piramidės* pagrindus, ...“
Atsakymas. 30 cm ir 14 cm.
Nurodymas. Nupjautinės piramidės sienos — keturios lygios lygiašonės trapecijos. Kadangi duota šių trapecijų plotų suma (nupjautinės piramidės šoninio paviršiaus plotas), tai apskaičiavus vienos trapecijos plotą reikės rasti trapecijos pagrindus, kai žinomas jos plotas, šoninės kraštinės ir aukštinės ilgiai.

118. $1064\,\text{cm}^2$. *Nurodymas.* Žr. 113 uždavinio sprendimą.

119. a) $S_{\text{šon}} = 112\,\text{dm}^2$, $S_{\text{pav}} = 228\,\text{dm}^2$; b) $52\sqrt{7}\,\text{dm}^3$.

120. AA_1C_1C — lygiašonė trapecija, kurios $A_1C_1 = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4\,(\text{cm})$, $AC = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2} = 10\,(\text{cm})$. Tada $EC = \frac{AC - A_1C_1}{2} = \frac{10-4}{2} = 3\,(\text{cm})$. Iš stačiojo $\triangle CEC_1$: $C_1E = H = EC\,\text{tg}\,\alpha$, $H = 3\,\text{tg}\,\alpha$.
$V_{\text{nup}} = \frac{1}{3}\left((5\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 + \sqrt{(5\sqrt{2})^2 \cdot (2\sqrt{2})^2}\right) \cdot 3\,\text{tg}\,\alpha = 78\,\text{tg}\,\alpha$; kai $\alpha = 46°$, tai $V_{\text{nup}} \approx 80{,}808\,\text{cm}^3$.





121. $AE = \frac{5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{15}{2}\,(\text{cm})$, $A_1E_1 = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\,(\text{cm})$,
$AO = \frac{2}{3}AE = \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{2} = 5\,(\text{cm})$, $A_1O_1 = \frac{2}{3}A_1E_1 = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2\,(\text{cm})$;
$AD = AO - A_1O_1 = 5 - 2 = 3\,(\text{cm})$, $A_1D = H = AD\,\text{tg}\,\alpha$, $H = 3\,\text{tg}\,\alpha$.
$V_{\text{nup}} = \frac{1}{3}\left(\frac{(5\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{(2\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{(5\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{(2\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}\right) \cdot 3\,\text{tg}\,\alpha = \frac{117\sqrt{3}}{4}\,\text{tg}\,\alpha$;
kai $\alpha = 62°$, tai $V_{\text{nup}} \approx 95{,}3\,\text{cm}^3$.

122. a) $(-1 + \sqrt{10}; -1 - \sqrt{10})$, $(-1 - \sqrt{10}; -1 + \sqrt{10})$, $(4; -3)$, $(-3; 4)$;
b) $(-1; 5)$, $(1; 3)$.

123. a) $a > \frac{1}{8}$; b) $a < -9$.

124. $n(n+1)(n+2) + (n+1) = (n+1)(n(n+2)+1) = (n+1)(n^2+2n+1) = (n+1)(n+1)^2 = (n+1)^3$.

125. Sakykime, kad tarp Zapyškio ir Kriūkų yra x km. Tada motorinės valties greitis pasroviui yra $\frac{x}{2}$ km/h, o prieš srovę — $\frac{x}{3}$ km/h. Valties savasis greitis lygus valties greičio pasroviui ir greičio prieš srovę aritmetiniam vidurkiui, t. y. $\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{3}}{2} = \frac{5x}{12}$ (km/h). Upės tėkmės greitis yra $\frac{x}{2} - \frac{5x}{12} = \frac{x}{12}$ (km/h). Vadinasi, visą kelią plaustas plauktų $x : \frac{x}{12} = 12$ (h).

126. Po pirmojo žingsnio nenudažyta kvadrato dalis lygi $\frac{1}{2}\text{m}^2$;
po antrojo: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}\,(\text{m}^2)$;
po trečiojo: $\frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}\,(\text{m}^2)$;
po ketvirtojo: $\frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}\,(\text{m}^2)$ ir t. t.;
po dešimtojo: $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}\,(\text{m}^2)$.

127. 64°, 64°, 52° arba 58°, 58°, 64°.

128. 1, 1, 1; 1, 2, 2; 2, 2, 2.

129. a) $(45\sqrt{3} + 70)\,\text{cm}$; b) $(42\sqrt{3} + 108)\,\text{cm}$.

130. a) $a(x^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})x - \sqrt{6}) = 0$, $a \neq 0$; b) $a(x^2 - 10x + 20) = 0$, $a \neq 0$.

8.6. Nupjautinis kūgis

Šio skyrelio struktūra ir tikslai panašūs į praeito skyrelio. Pravartu visus mokinius supažindinti su nupjautiniu kūgiu, pasakyti, kas yra jo aukštinė ir sudaromoji ir pamokyti apskaičiuoti jo tūrį bei šoninio paviršiaus plotą.

Pakartoti:

ką vadiname kūgiu;
ką vadiname kūgio aukštine, sudaromąja;
kam lygus kūgio tūris ir šoninio paviršiaus plotas;
kam lygus skritulio plotas ir apskritimo ilgis.

Išmokti:

kaip gaunamas nupjautinis kūgis;
ką vadiname nupjautinio kūgio aukštine ir sudaromąja;
apskaičiuoti nupjautinio kūgio tūrį ir šoninio paviršiaus plotą.

Šiame skyrelyje:

1. Pateiktas kūgio pavyzdys, siūlant mokiniams patiems prisiminti, ką vadiname kūgiu, jo sudaromąja ir kaip apskaičiuoti kūgio tūrį ir šoninio paviršiaus plotą.

   Nurodymas. Vertėtų paklausti mokinių, ką vadiname kūgio aukštine, kam lygus apskritimo ilgis ir skritulio plotas.
2. Aiškinama, kaip galima gauti nupjautinį kūgį.

   Nurodymas. Tai turėtų suprasti visi mokiniai. Čia galima būtų nurodyti, kas yra nupjautinio kūgio sudaromoji ir paklausti, kokią figūrą sukant gaunamas kūgis. Toliau esanti teorinė medžiaga skirta tik stipresniems mokiniams.
3. Įrodoma, kad kūgį kertant lygiagrečia pagrindui plokštuma, pjūvyje gauname skritulį.
4. Pastebima, kad nupjautinį kūgį galima gauti sukant stačiąją trapeciją apie jos pagrindams statmeną kraštinę.
5. Aiškinama ir formulėmis pateikiama, kaip susiję didžiojo kūgio, atkirstojo kūgio ir nupjautinio kūgio tūriai ir šoninių paviršių plotai.

   Nurodymas. Sprendžiant uždavinius, susijusius su nupjautiniais kūgiais, nebūtina remtis šiomis formulėmis. Galima naudotis tuo, kad nupjautinio kūgio tūris (šoninio paviršiaus plotas) lygus didžiojo kūgio tūriui (šoninio paviršiaus plotui) minus atkirstojo kūgio tūris (šoninio paviršiaus plotas).
6. Pateikiamas išspręstas 1 uždavinys.

   Nurodymas. Būtų gerai, kad šį uždavinį panagrinėtumėte su daugeliu mokinių.
7. Pateikiamas išspręstas 2 uždavinys.

   Nurodymas. Šį uždavinį nagrinėkite tik su stipriausiais mokiniais.
8. Pateikiamos formulės, remiantis kuriomis patogu skaičiuoti nupjautinio kūgio tūrį ir šoninio paviršiaus plotą.

   Nurodymas. Mokiniams tų formulių įsiminti neliepkite ir leiskite jomis naudotis sprendžiant uždavinius.
9. Kaip įdomioji medžiaga pateikiami pavyzdžiai, ką gauname pjūvyje, kai kūgį kertame plokštuma, *nelygiagrečia* pagrindui.

   Nurodymas. Atkreipkite visų mokinių dėmesį į kūgio ašinio pjūvio sąvoką.

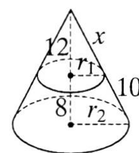
131–143 — teminiai uždaviniai, kiti — kartojimo.

48–61, 63, 64

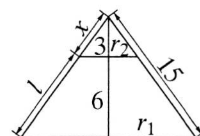
131. 16π cm^2. *Nurodymas.* Sakykime, kad S — kūgio pagrindo plotas, o S_1 — kūgio pjūvio plotas. Tada $\frac{S_1}{S} = (\frac{2}{5})^2$.

132. 1,2 m. *Nurodymas.* Tegul x — kūgio aukštinė. Tada $\frac{x-0{,}4}{x} = \frac{0{,}5}{0{,}75}$.

133. *I būdas.* Iš panašiųjų trikampių (žr. brėžinį): $\frac{x}{x+10} = \frac{12}{20}$, $x = 15$. Iš stačiojo $\triangle$: $r_1 = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$; $k = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$, $V_{\text{nup}} = \left((\frac{5}{3})^3 - 1\right) \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot 9^2 \cdot 12 = 1176\pi$.
II būdas. $r_1 = 9$, $r_2 = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$; $V_{\text{nup}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 15^2 \cdot 20 - \frac{1}{3}\pi \cdot 9^2 \cdot 12 =$
$= 1176\pi$.
III būdas. $r_1 = 9$, $r_2 = 15$, $V_{\text{nup}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 8 \cdot (15^2 + 9^2 + 15 \cdot 9) = 1176\pi$.



134. $r_1 = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$; $\frac{r_2}{r_1} = \frac{3}{9}$, $r_2 = 4$; $x = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $l = 15 - 5 = 10$; $S_{\text{šon}} = \pi l(r_1 + r_2) = \pi \cdot 10 \cdot (12+4) = 160\pi$, $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 6 \cdot (12^2 + 4^2 + 12 \cdot 4) =$
$= 416\pi$.



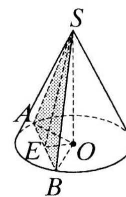
135. $\approx 1{,}5$ dm.

136. a) $\frac{4}{3}$; b) $\frac{8}{7}$.

137. $10\,300\pi$ cm^3 $= 10{,}3\pi$ dm^3.

138. a) $8\sqrt{41}\pi$ dm^2; b) $8(5 + \sqrt{41})\pi$ dm^2; c) $\frac{260\pi}{3}$ dm^3.

139. a) $\smile AB = 90° \Rightarrow \angle AOB = 90° \Rightarrow AB = R\sqrt{2}$; $EO = \frac{AB}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$; $SE^2 = R^2 + \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3R^2}{2}$, $SE = \frac{R\sqrt{6}}{2}$; $S_{ASB} = \frac{1}{2}R\sqrt{2}\cdot\frac{R\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}R^2}{2}$;
b) $\frac{\sqrt{7}R^2}{4}$.



140. $4\sqrt{4930} \approx 280{,}9\,\text{cm}^2$.

141. $\approx 28{,}3\,\text{dm}^3$ ($1\,\text{dm}^3 = 1\,\ell$).
Nurodymas. Bidono tūris lygus dviejų ritinių ir nupjautinio kūgio tūrių sumai.

142. 1) $V_{\text{ledo}} = 5\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3 = \frac{20\pi}{3}$ (cm^3), $V_{\text{vandens}} = 0{,}9V_{\text{ledo}} = 0{,}9\cdot\frac{20\pi}{3} = 6\pi$ (cm^3), $V_{\text{taurės}} = \frac{1}{3}\pi\cdot 6^2\cdot 4 = 48\pi$ (cm^3); $\frac{V_{\text{vandens}}}{V_{\text{taurės}}} = \frac{6\pi}{48\pi} = \frac{1}{8}$;
2) $\frac{V_{\text{vandens}}}{V_{\text{taurės}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$, $k = \frac{1}{2}$; $\frac{AO_1}{AO} = \frac{1}{2}$, $AO_1 = \frac{AO}{2} = \frac{4}{2} = 2$ (cm);
3) $V_{\text{gėrimo}} = V_{\text{taurės}} - V_{\text{vandens}} = 48\pi - 6\pi = 42\pi \approx 132$ (cm^3), t. y. $132\,\text{m}\ell$.

143. R_1 — apatinio vonelės pagrindo spindulys, R_2 — viršutinio vonelės pagrindo spindulys, $V_{\text{nup}} = \frac{1}{3}\pi(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2)\cdot H$. Kadangi $R_1 = \frac{2}{3}R_2$, o $20\,\ell = 20\,000\,\text{cm}^3$, tai $\frac{1}{3}\cdot 3{,}14\left((\frac{2}{3}R_2)^2 + R_2^2 + \frac{2}{3}R_2^2\right)\cdot 20 = 20\,000$, $R_2 \approx 21$ cm; $R_1 \approx \frac{2}{3}\cdot 21 = 14$ (cm); $S_{\text{pav}} = S_{\text{šon}} + \pi R_1^2$; $l = \sqrt{20^2 + 7^2} = \sqrt{449} \approx 21$ (cm).
$S_{\text{pav}} = \pi\cdot 21\cdot(14+21) + \pi\cdot 14^2 = 931\pi \approx 2923$ (cm)^2.

144. a) 4; b) -1.

145. a) 0, 1, 5, 6; b) -2, 0.

146. a) Vekselio vertė yra $1489{,}75 + 10{,}25 = 1500$ (Lt). Pagal paprastųjų palūkanų formulę $P_d = S\cdot\frac{p}{100}\cdot\frac{d}{360}$ gausime: $10{,}25 = 1500\cdot\frac{8{,}2}{100}\cdot\frac{d}{360}$, $d = 30$;
b) diskonto suma lygi $3200 - 3128 = 72$ (Lt). Pagal tą pačią formulę kaip ir a) punkte gausime: $72 = 3200\cdot\frac{p}{100}\cdot\frac{90}{360}$, $p = 9\%$.
Atsakymas. a) 30 dienų; b) 9%.

147. Sprendžiame lygtį: $\frac{3}{2x+1} + \frac{2}{2x-1} = \frac{3}{2x+1}\cdot\frac{2}{2x-1}$, $x = 0{,}7$.

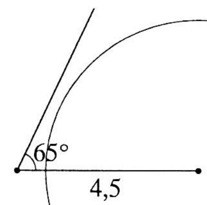
148. Kadangi dalijant iš vienaženklio skaičiaus gauta liekana yra 8, tai daliklis yra 9. Iš 9 dalijasi tie skaičiai, kurių skaitmenų suma dalijasi iš 9. Skaičiaus $\overline{3aa}$ skaitmenų suma lygi $2a + 3$. Atėmę liekaną, t. y. 8, gausime sumą, kuri dalysis iš 9: $2a + 3 - 8 = 2a - 5$. Kadangi $2a - 5 = 2a + 4 - 9 = 2(a+2) - 9$ dalijasi iš 9, tai $a + 2$ dalijasi iš 9, taigi $a = 7$.
Atsakymas. Dalinys yra 377, daliklis — 9, dalmuo — 41.

149. **B** ir **D**.

150. a) Lygtis turi du skirtingus realius sprendinius, kai $k \neq 4$; b) $k > 1$.

151. a) Lygtį $6x^2 - x - 2 = 0$ užrašykime redukuotąja kvadratine lygtimi. Turėsime: $x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0$. Kadangi $D > 0$, tai pagal Vijeto teoremą $x_1 + x_2 = \frac{1}{6}$, $x_1\cdot x_2 = -\frac{1}{3}$. Lygybės $x_1 + x_2 = \frac{1}{6}$ abi puses pakelkime kvadratu: $(x_1 + x_2)^2 = \frac{1}{36}$, $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = \frac{1}{36}$. Kadangi $x_1\cdot x_2 = -\frac{1}{3}$, tai $x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{36} - 2\cdot(-\frac{1}{3}) = \frac{25}{36}$;
b) 6,5.

152. a) 14. *Nurodymas.* Taikykite kosinusų teoremą.
b) Duotam trikampiui taikome kosinusų teoremą: $(2\sqrt{3})^2 = x^2 + 4{,}5^2 - 2\cdot x\cdot 4{,}5\cos 65°$; $\cos 65° \approx 0{,}423$; $x^2 - 3{,}807x + 8{,}25 = 0$. Ši lygtis realių sprendinių neturi, todėl darome išvadą, kad toks trikampis neegzistuoja. Kitaip tariant, jei mėgintume nubraižyti šį trikampį, tai nubrėžę 4,5 ilgio vienetų atkarpą ir iš vieno jos galo atidėję 65° didumo kampą, iš kito galo brėždami $2\sqrt{3}$ ilgio vienetų spindulio apskritimą gautume, kad apskritimas nekerta kitos kampo kraštinės (žr. brėžinį).



153. Taip. Pavyzdžiui, reikia imti 4 dėžes po 17 kg ir 2 dėžes po 16 kg.

9. TYRIMO UŽDAVINIAI

Šį skyrių geriausia nagrinėti dalimis per visus mokslo metus, bet galima nagrinėti ir kaip atskirą vientisą skyrių. Šio skyriaus tematika ir uždaviniai neturėtų būti per sunkūs daugeliui mokinių. Spręsti tokius uždavinius dažnam būna įdomiau negu, pavyzdžiui, skaičiuoti reiškinių reikšmes, prastinti reiškinius, spręsti lygtis, nelygybes, jų sistemas, tirti funkcijas ir pan.

Skyrius sudarytas iš keturių skyrelių. Visus skyriaus uždavinius galima vadinti logikos uždaviniais. Logikos uždaviniams spręsti nereikia ypatingų teorinių žinių, bet jų sprendimas palengvėja žinant tam tikrus dėsningumus ar sprendimo būdus. Sprendžiant tokius uždavinius svarbu remtis sveika nuovoka ir teisingai surašyti samprotavimų grandinę. Nagrinėjamuose skyreliuose ir kreipiamas dėmesys į pagrindinius tokių uždavinių sprendimo momentus.

9.1. Kas yra kas?

Šiame skyrelyje parodoma, kad sprendžiant logikos uždavinius kartais patogu sudaryti vadinamąją teisingumo lentelę ar lenteles (1 pavyzdys). Tokios lentelės yra vaizdžios, ir jų sudarymas dažnai palengvina uždavinio sprendimą. Aišku sudarinėti lenteles nėra būtina (2 pavyzdys). Bet tada samprotavimų grandinės nėra tokios vaizdžios ir jose lengva pasimesti.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

154. Lina gyvena Druskininkuose, Jurgita — Zarasuose, Rita — Utenoje, Monika — Rokiškyje.
Nurodymas. Kadangi Lina negyvena nei Utenoje, nei Zarasuose, nei Rokiškyje, tai ji yra iš Druskininkų.

155. Languotą suknelę vilki Vita, vienspalvę — Rūta, su žirneliais — Lina.
Pastaba. Sąlygoje yra korektūros klaida. Turėtų būti: „Įspėk mergaičių vardus, ...“
Nurodymas. Iš pradžių nustatykite, kokia yra Rūtos suknelė, po to — Vitos.

156. I — Stirna, II — Kiškis, III — Vilkas.
Nurodymas. Iš pradžių išsiaiškinkite Kiškio užimtą vietą.

157. Gytis — vyriausias, Vytas — vidurinysis, Rytis — jauniausias.
Nurodymas. Kadangi Vytas ne vyresnis už Gytį, o Rytis ne vyresnis už Vytą, tai vyriausias iš brolių yra Gytis.

158. Rimas — žemiausias, Vilius — vidurinis, Algis — aukščiausias.
Nurodymas. Kadangi Algis nėra žemesnis už Vilių, o Rimas nėra aukštesnis už Vilių, tai Algis yra aukščiausias.

159. Rytis — aukščiausias, Rimas — žemesnis, Gytis — dar žemesnis, Romas — žemiausias.
Pastaba. Prie šio uždavinio turėjo būti piešinys. Kadangi dėl neapsižiūrėjimo vadovėlyje piešinio nėra, tai uždavinio pirmą sakinį galima formuluoti, pavyzdžiui, taip: „Keturių berniukų — Romo, Rimo, Ryčio ir Gyčio ūgiai skiriasi.“

160. *I būdas.* Užpildome vardų-pavardžių lentelę, panaudodami uždavinio informaciją. (Prie ženklų „ + “ ir „ – “ nurodytas ženklo parašymo eilės numeris.)
II būdas. Kadangi Juozas ne Juozaitis, o jis gyvena viename name su Petraičiu, tai Juozas yra Jonaitis, Jonas — Petraitis, o Petras — Juozaitis.
Atsakymas. Jonas Petraitis, Petras Juozaitis, Juozas Jonaitis.

Vardas Pavardė	Jonas	Petras	Juozas
Petraitis	$+_5$	$-_2$	$-_4$
Jonaitis	$-_1$	$-_8$	$+_7$
Juozaitis	$-_6$	$+_9$	$-_3$

161. Vytas turi išeiti anksčiausiai, po to — Algis ir galiausiai — Saulius.
Nurodymas. Kadangi Vytui į mokyklą yra ne arčiau kaip Algiui, o Sauliui — ne toliau kaip Algiui, tai toliausiai nuo mokyklos gyvena Vytas ir į mokyklą jis turi išeiti anksčiausiai.

162. Staliūno tėvas yra stiklius, Bataičio — stalius, Stikliaus — batsiuvys.

163. Sauliaus pavardė Jonaitis, Vyto — Kalvaitis, Lino — Petraitis.

164. Tado sesuo Aušra, Ginto — Saulė, Ryčio — Rūta.

165. Rasa užsiima gimnastika, Vaiva — plaukimu, o Danutė — slidinėja.

166. Žilvinas mokėsi 10^b, Rytis — 10^a, Saulius — 10^c klasėje.
Nurodymas. Kadangi antrąją partiją Rytis žaidė su 10^c klasės mokiniu, o Žilvinas ilsėjosi, tai Saulius mokėsi 10^c klasėje.

167. Pagal sąlygą „fizikos mokytojas yra vyresnis už biologijos mokytoją, tačiau jaunesnis už Bretkūną“, tai vyriausias pagal amžių yra Bretkūnas ir jis gyvena toliausiai. Todėl viename name gyvena Augaitis ir Kazlauskas. Kadangi fizikos mokytojas yra vyresnis už biologijos mokytoją (Augaitį), tai fiziką dėsto Kazlauskas. Kadangi matematikos mokytojas su Kazlausku labai dažnai žaidžia šachmatais, tai Augaitis dėsto matematiką, o Kazlauskas — chemiją. Lieka — Bretkūnas dėsto istoriją ir geografiją.
Atsakymas. Augaitis dėsto biologiją ir matematiką, Kazlauskas — fiziką ir chemiją, o Bretkūnas — istoriją ir geografiją.

168. *Sprendimas. I būdas.* Lentelėje vertikaliai surašome galimas komandų poras, o horizontaliai — ratus. Jei žinome, kuriame rate įvyko tam tikros poros rungtynės, tai atitinkamame langelyje rašome pliusą, o visuose kituose ratų langeliuose ties šia pora rašome minusą. Taip pat minusus rašome to rato stulpelio langeliuose, ties kuriais yra bet kuri iš šių komandų. Gauname lentelę, pavaizduotą dešinėje. (Užpildytos lentelės kiekvienoje eilutėje turės būti po vieną pliusą ir 4 minusus, o stulpeliuose — po 3 pliusus, kiti — minusai.)
Kadangi kiekvienoje eilutėje turi būti lygiai vienas pliusas (kiekvienos dvi komandos susitiko lygiai vieną kartą), o eilutėje „Žvirbliai“ ir „Musės“ jau parašyti 4 minusai, tai + bus V stulpelyje, t. y. „Žvirbliai“ ir „Musės“ susitiko V ratą. Vadinasi, tą dieną šios komandos negali rungtyniauti su kitomis, tad atitinkamuose langeliuose rašome minusus. Dabar matome, kad „Musės“ su „Vanagais“ žaidė I ratą — tame langelyje rašome pliusą, o negalimų susitikimų langeliuose — minusus. Matome, kad I ratą trečios rungtynės vyko tarp „Varnų“ ir „Šarkų“. Iš šių duomenų galime nustatyti, kad V ratą „Šarkos“ susitiko arba su „Ereliais“, arba su „Vanagais“.
Analogiškai toliau pildome lentelę. Matome, kad II ratą žaidė „Žvirbliai“ ir „Varnai“, o trečiosios rungtynės šį ratą įvyko tarp „Vanagų“ ir „Šarkų“. Vadinasi, paskutiniame rate susitiko „Šarkos“ ir „Ereliai“.
Pastaba. Galite paprašyti mokinių pabaigti pildyti visą lentelę ir paklausti, kokios komandos susitiko III, IV ir V ratuose.

	I	II	III	IV	V
„Ereliai“ „Žvirbliai“	+	–	–	–	–
„Ereliai“ „Musės“	–	+	–	–	–
„Ereliai“ „Varnai“	–	–	–		
„Ereliai“ „Vanagai“	–	–		–	
„Ereliai“ „Šarkos“	–	–			
„Žvirbliai“ „Musės“	–	–	–	–	
„Žvirbliai“ „Varnai“	–		–	–	
„Žvirbliai“ „Vanagai“	–	–	–	+	–
„Žvirbliai“ „Šarkos“	–			–	
„Musės“ „Varnai“	–	–	+	–	–
„Musės“ „Vanagai“		–	–	–	
„Musės“ „Šarkos“		–	–		
„Varnai“ „Vanagai“			–	–	
„Varnai“ „Šarkos“			–		
„Vanagai“ „Šarkos“				–	

II būdas. Remdamiesi teiginiais *pirmąjį šeštadienį „Ereliai“ nugalėjo „Žvirblius“, antrąjį šeštadienį „Ereliai“ įveikė „Muses“, trečiąjį šeštadienį „Musės“ nugalėjo „Varnus“*, darome išvadą, kad trečiąjį šeštadienį „Ereliai“ susitiko arba su „Šarkomis“, arba su „Vanagais“. Tačiau susitikti su „Šarkomis“ negalėjo, nes tokiu atveju trečiąjį šeštadienį būtų susitikę „Žvirbliai“ su „Vanagais“, o taip būti negali, nes šios komandos susitiko ketvirtąjį šeštadienį. Vadinasi, trečiąjį šeštadienį „Ereliai“ susitiko su „Vanagais“.
Ketvirtą šeštadienį „Ereliai“ galėjo susitikti arba su „Šarkomis“, arba su „Varnais“. Jeigu būtų susitikę su „Šarkomis“, tai pagal sąlygą „Varnai“ turėjo susitikti su „Musėmis“, o taip būti negali (šios komandos susitiko trečiąjį šeštadienį). Vadinasi, „Ereliai“ susitiko su „Varnais“, penktąjį šeštadienį — su „Šarkomis“.
Atsakymas. „Šarkos“ susitiko su „Ereliais“.
III būdas. Galima naudotis ir įprastine turnyrine lentele. Surašę žinomus duomenis, gauname tokią lentelę (žr. 1 lentelę):

1 lentelė

	E	Ž	M	Vr	Van	Š
E		I	II			
Ž	I				IV	
M	II			III		
Vr			III			
Van		IV				
Š						

2 lentelė

	E	Ž	M	Vr	Van	Š
E		I	II	IV		V
Ž	I		V	II	IV	III
M	II	V		III	I	IV
Vr	IV	II	III		V	
Van		IV	I	V		
Š	V	III	IV			

Kaip pasirinkti sekantį langelį? Imame langelį, apie kurį turime „daug“ informacijos — langelio ŽM (ir MŽ) ir stulpelyje, ir eilutėje užpildyta po 2 langelius ir jau įrašyti ratai II, III, I, IV. Vadinasi, langeliui ŽM (ir MŽ) lieka V ratas. Jį įrašome.
Dabar matome, kad į langelį ŽVr (ir į VrŽ) galima įrašyti tik II. Tada į ŽŠ (ir ŠŽ) reikia rašyti III, po to į MVan (ir VanM) — I, tada į MŠ (ir ŠM) — IV, į EVr (ir VrE) — IV, o dabar į EŠ (ŠE) — V (žr. 2 lentelę).

9.2. Kur tiesa?

Šiame skyrelyje patariama, kad kartais patogu, sprendžiant logikos uždavinius, daryti įvairias prielaidas ir tikrinti jų teisingumą. Gautus rezultatus vėl patartina surašyti į lentelę (lenteles).

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

169. Darome prielaidas:

1. Egzamino neišlaikė Justas.
2. Egzamino neišlaikė Rimas.
3. Egzamino neišlaikė Simas.

Kiekvieną prielaidą tikriname atsižvelgdami į vaikinų atsakymus ir užpildome lentelę, kurioje 1 reiškia tiesą, o 0 — melą:

Prielaida „Neišlaikė“	Atsakymai: Justo		Rimo		Simo	Išvada
Justas	0	1	0	1	1	Neteisinga
Rimas	1	0	1	1	1	Teisinga
Simas	1	1	1	0	0	Neteisinga

Atsakymas. a) Rimas; b) Justas.

170. Prielaidas ir vaikinų atsakymus surašome lentelėje, kurioje 1 reiškia tiesą, o 0 — melą:

Prielaida „Vazą sudaužė“	Atsakymai: Gedimino	Pauliaus		Virgio
Gediminas	1	1	1	0
Paulius	0	0	1	1
Virgis	0	1	0	0

Atsakymas. a) Paulius; b) Gediminas; c) Virgis.

171. Prielaidas apie konkuruojančių firmų galimą bankrotą ir firmų pranešimus apie jį surašę į lentelę gauname, jog kiekvienoje eilutėje yra po vieną 1 (tiesa) ir po du 0 (melas). Taigi situacija neapibrėžta: negalima įvardyti, kuri firma bankrutuoja.
Atsakymas. Negalima.

172. Kadangi Saulius visada sako tik tiesą, tai jo žodžiai „Abu pasakė netiesą“ galėjo būti ištarti tik tuo atveju, kai kibirą atnešė Žilvinas.
Atsakymas. Žilvinas.

173. Eglė.

174. Rūta užėmė pirmąją vietą.
Nurodymas. Išnagrinėkite užpildytą lentelę ir nustatykite išvados teisingumą:

Prielaida „I vietą užėmė“	Atsakymai: Jūratės	Laimos	Rūtos		Išvada
Jūratė	1	1	1	1	
Laima	0	0	1	0	
Rūta	0	1	1	1	

175. 1) Pirmą vietą užėmė Tomas, antrą — Simas, trečią — Marius, ketvirtą — Kazys, penktą — Vladas;
2) pirmą vietą užėmė Simas, antrą — Marius, trečią — Kazys, ketvirtą — Vladas, penktą — Tomas.

176. Kadangi trečiasis kalbėtojas neteisus, tai tuo labiau neteisus ir pirmas. Tada teisybę sakė antras — „rytoj bus giedra ir saulė“. Iš čia aišku, kad Jonas kalbėjo antras, Vytas — pirmas, o Laurynas — trečias.

177. Jeigu keliautojo ir jo pasamdyto tarno pamatytas čiabuvis buvo melagis, tai jis tarnui sakė esąs teisuolis, o jeigu pamatytas čiabuvis buvo teisuolis, tai jis sakėsi esąs teisuolis.
Taigi tarnas iš pamatyto ir paklausto čiabuvio išgirdo tvirtinimą „esu iš teisuolių genties“. Kadangi tarnas keliautojui sakė „tas tvirtina, jog esąs iš teisuolių genties“, tai tarnas buvo teisuolis.

9.3. Dirichlė principas

Dirichlė principas labai paprastas, — tik skamba gąsdinančiai. Jo esmę suprasti gali ir patys silpniausi mokiniai.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

178. *I būdas.* 4 obuolių rūšys — „narveliai“, o 105 obuoliai — „triušiai“. Kadangi į 4 „narvelius“ sutalpinti 105 „triušiai“, o $105 = 4 \cdot 26 + 1$, tai pagal Dirichlė principą bus „narvelis“, kuriame bus bent 27 „triušiai“. Taigi iš 105 keturių rūšių obuolių mažiausiai 27 obuoliai yra vienos rūšies.

II (prieštaros) būdas. Tarkime, kad kiekvienos rūšies yra ne daugiau kaip 26 obuoliai. Tuomet dėžėje būtų ne daugiau kaip $26 \cdot 4 = 104$ obuoliai. Bet tai prieštarauja sąlygai, kad dėžėje yra 105 obuoliai. Prieštara reiškia, kad teisingas yra uždavinio teiginys, jog dėžėje yra mažiausiai 27 vienos rūšies obuoliai.

III būdas. Vienos rūšies obuolių skaičiaus vidurkis yra $\frac{105}{4} = 26{,}25$ obuolio. Kadangi vidurkis didesnis už 26, tai yra ir rūšis, kurios yra daugiau kaip 26 obuoliai.

Šitokį sprendimo būdą galima pavadinti „vidurkio principu“: jei turime kelis skaičius, tai yra bent vienas skaičius, ne mažesnis už vidurkį, ir bent vienas skaičius, ne didesnis už vidurkį. Žinoma, tai tas pats Dirichlė principas, tik suformuluotas kiek kitaip. Jį galite taikyti ir kituose uždaviniuose.

179. *I būdas.* Į 3 rūšis („narvelius“) suskirstykime 25 dėžes („triušius“). Kadangi $25 = 3 \cdot 8 + 1$, tai pagal Dirichlė principą yra bent 9 dėžės su tos pačios rūšies obuoliais.

II būdas. Tarkime, kad nėra devynių dėžių su I rūšies obuoliais. Tuomet yra bent 17 dėžių su II ir III rūšių obuoliais. Vadinasi, bent vienos iš šių rūšių yra bent 9 dėžės.

III būdas. Taikykite vidurkio principą.

180. *I būdas.* Čia „narveliai“ — klasės, o „triušiai“ — mokiniai. Kadangi yra $1076 = 25 \cdot 43 + 1$ mokiniai, o „narvelių“ yra 43, tai pagal Dirichlė principą bus „narvelis“, kuriame yra daugiau kaip 25 mokiniai.

II (prieštaros) būdas. Tarkime, kad kiekvienoje klasėje yra ne daugiau kaip 25 mokiniai. Tuomet mokykloje mokytųsi ne daugiau kaip $25 \cdot 43 = 1075$ mokiniai. Bet tai prieštarauja sąlygai, kad mokykloje mokosi 1076 mokiniai. Prieštara reiškia, kad teisingas yra uždavinio teiginys, t. y. kad mokykloje yra klasė, kurioje mokosi ne mažiau kaip 26 mokiniai.

181. Metuose yra daugiausiai 366 dienos. Čia „narveliai“ — dienos, o „triušiai“ — mokiniai. Kad bent į vieną „narvelį“ būtinai patektų bent 2 mokiniai, mokykloje turi būti ne mažiau kaip 367 mokiniai.

182. Čia „narveliai“ — mėnesiai, o „triušiai“ — mokiniai. Kadangi yra $25 = 12 \cdot 2 + 1$ mokiniai, o „narvelių“ yra 12, tai pagal Dirichlė principą yra toks metų mėnuo, kai savo gimtadienį švenčia ne mažiau kaip 3 mokiniai.

183. Čia „narveliai“ — liekanos, gaunamos dalijant sveikąjį skaičių iš 2, o „triušiai“ — trys sveikieji skaičiai. Dalijant skaičių iš 2 gaunama liekana yra 0 arba 1. Kadangi yra 2 „narveliai“ ir 3 skaičiai, tai pagal Dirichlė principą yra „narvelis“, kuriame yra bent du skaičiai. Jei du skaičiai yra „narvelyje“ 0, tai jie dalūs iš dviejų ir bet kurių dviejų suma taip pat dali iš 2. Jei bent du skaičiai yra „narvelyje“ 1, tai kiekvienas jų duoda liekaną 1 ir dviejų suma dalijasi iš dviejų. Žinoma, čia viskas aišku ir be „narvelių“. Jeigu yra bent du lyginiai skaičiai, tai jų suma dalijasi iš 2. Jeigu lyginių ne daugiau kaip vienas, tai nelyginių ne mažiau kaip du, o dviejų nelyginių suma dalijasi iš 2.

184. Dalijant skaičius iš 5 galima gauti 5 skirtingas liekanas: 0, 1, 2, 3, 4. Tarkime, kad „narveliai“ — liekanos, o „triušiai“ — šeši sveikieji skaičiai. Kadangi „narvelių“ yra 5, o skaičių — 6, tai yra „narvelis“, kuriame yra bent du skaičiai. Tų skaičių skirtumas dalijasi iš 5.

185. Sudarykime 51 „narvelį“: „narvelis“ 0 — skaičiams, kurie baigiasi skaitmenimis 00; „narvelis“ 1 — skaičiams, kurie baigiasi skaitmenimis 01 arba 99 (į šį „narvelį“ patenka ir skaičius 1); „narvelis“ 2 — skaičiams, kurie baigiasi skaitmenimis 02 arba 98 (į šį „narvelį“ patenka ir skaičius 2); ...; „narvelis“ 49 — skaičiams, kurie baigiasi skaitmenimis 49 arba 51; „narvelis“ 50 — skaičiams, kurie baigiasi skaitmenimis 50. Kadangi skaičių yra 52, o „narvelių“ tik 51, tai bus „narvelis“, kuriame yra du skaičiai. Tuomet arba jų skirtumas (jeigu paskutiniai du skaitmenys vienodi), arba jų suma (priešingu atveju) baigiasi skaitmenimis 00 ir dalijasi iš 100.

186. a) Įrodykime, kad paėmus 13 pieštukų ne mažiau kaip 4 pieštukai yra tos pačios spalvos. Čia „narveliai“ — spalvos, o „triušiai“ — paimti pieštukai. Kadangi yra 4 „narveliai“, o pieštukų 13 ($13 = 4 \cdot 3 + 1$), tai pagal Dirichlė principą bus „narvelis“, kuriame yra daugiau kaip 3 pieštukai. Taigi yra bent 4 vienos spalvos pieštukai.
Dar reikia įrodyti, kad mažiau kaip 13 pieštukų imti neužtenka. Iš tikrųjų, net jeigu imame 12 pieštukų, tai galima imti po 3 kiekvienos spalvos, taigi keturių vienos spalvos pieštukų nebus.

b) Aišku, kad 26 pieštukų neužtenka: gali atsitikti, kad tai bus 10 raudonų, 8 geltoni ir 8 mėlyni pieštukai. Įrodysime, kad 27 pieštukų tikrai užteks. Tarkime priešingai — kad tarp paimtųjų 27 pieštukų nėra kurios nors spalvos. Tada nepaimti bus kurios nors spalvos pieštukai — taigi mažiausiai 4 (jei nėra raudonos — nepaimti mažiausiai 8 pieštukai, ..., jei nėra žalios — mažiausiai 4 pieštukai).

c) Aišku, kad 27 pieštukų negana: tai gali būti 10 raudonų, 8 mėlyni, 4 žali ir 5 geltoni pieštukai. Įrodysime, kad 28 pieštukų užtenka. Iš tikrųjų, paėmus 28 pieštukus lieka 2 pieštukai. Iš jų daugiausiai 2 gali būti geltoni. Vadinasi, paimta mažiausiai $8 - 2 = 6$ geltoni pieštukai.

Atsakymas. a) 13; b) 27; c) 28.

187. Sudarykime 30 „narvelių“ ir pažymėkime juos skaičiais $0, 1, 2, \ldots, 29$: į „narvelį“ su numeriu 0 talpinkime komandas, nežaidusias nei vienų rungtynių, į 1-ą — komandas, sužaidusias vienerias rungtynes, į 2-ą — dvejas, ..., į 29-ą — dvidešimt devynerias rungtynes (didžiausias galimų rungtynių skaičius). Arba „narvelis“ 0, arba „narvelis“ 29 yra tuščias, nes negali būti taip, kad viena komanda nesužaidė nei vienerių rungtynių, o kita tuo pačiu metu sužaidė 29 rungtynes. Likusiems 29-iems „narveliams“ tenka 30 komandų. Vadinasi, nors viename „narvelyje“ yra bent dvi komandos.

188. Nuspalvinkime mėlynai lankus, simetriškus raudoniems lankams apskritimo centro atžvilgiu. Kadangi raudonų lankų ilgių suma didesnė už pusę apskritimo ilgio, tai ir mėlynai nuspalvintų lankų ilgių suma didesnė už pusę apskritimo ilgio, todėl abiem spalvomis nuspalvintų lankų bendras ilgis didesnis už apskritimo ilgį. Vadinasi, bus apskritimo lankelių, nuspalvintų abiem spalvomis (savotiškas Dirichlė principas: iš tikrųjų, jei tokių lankelių nebūtų, tai jų ilgių suma būtų ne didesnė už apskritimo ilgį). Skersmens, nubrėžto per tašką, kuris nuspalvintas dviem spalvomis, galai bus nuspalvinti raudonai.

189. Tegul $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ — duotieji skaičiai. Sudarykime n sumų:

$$
\begin{aligned}
&a_1,\\
&a_1 + a_2,\\
&a_1 + a_2 + a_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.
\end{aligned}
$$

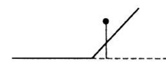
Jei bent viena iš jų dalijasi iš n, tai teiginys teisingas. Sakykime, kad nei viena iš jų nesidalija iš n. Tada dalijamos iš n jos gali duoti tik liekanas $1, 2, \ldots, n-1$.
Sumų yra n, o skirtingų nenulinių liekanų, gaunamų dalijant sveikuosius skaičius iš n, yra $n - 1$.
Čia „narveliai“ — liekanos, o „triušiai“ — sumos. Kadangi „narvelių“ yra $n-1$, o sumų n, tai pagal Dirichlė principą bus „narvelis“, kuriame yra daugiau kaip viena suma, t. y. bent dvi sumos. Tų sumų skirtumas dalijasi iš n, ir jis yra lygus kuriam nors duotajam skaičiui arba kelių skaičių sumai.
Kitas būdas. Nagrinėkime $n+1$ skaičių: $0, a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Liekanų dalijant juos iš n yra daugiausiai n. Vadinasi, bent du skaičiai turi tą pačią liekaną, taigi jų skirtumas dalijasi iš n.

190. Imkime $n + 1$ skaičių: m, m^2, m^3, ..., m^{n+1}. Čia „narveliai“ — liekanos, o „triušiai“ — m laipsniai. Kadangi „narvelių“ yra n, o skaičiaus m laipsnių $n + 1$, tai pagal Dirichlė principą bus „narvelis“, kuriame yra daugiau kaip vienas skaičiaus m laipsnis. Vadinasi, yra bent du laipsniai, kuriuos dalydami iš n gauname tą pačią liekaną. Tarkime, kad tai m^t ir m^s. Šių skaičių skirtumas $m^t - m^s$ dalijasi iš n, t. y. $m^t - m^s = a \cdot n$, arba $m^s(m^{t-s} - 1) = a \cdot n$. Kadangi m ir n yra tarpusavyje pirminiai skaičiai, tai m^s ir n taip pat yra tarpusavyje pirminiai. Tuomet skirtumas $m^{t-s} - 1$ dalijasi iš n, ir tai yra ieškomasis skaičius.

191. Padalykime kvadratą į 25 lygius kvadratėlius, kurių kiekvieno kraštinės ilgis lygus $\frac{1}{5}$ m (ilgius matuojame metrais, bet toliau to nežymėsime). Čia „narveliai" — kvadratėliai, o „triušiai" — taškai. Kadangi kvadratėlių yra 25, o taškų 51 ($51 = 25 \cdot 2 + 1$), tai pagal Dirichlė principą bus kvadratėlis, kuriame yra daugiau kaip 2 taškai, t. y. 3 arba daugiau. Taigi yra kvadratėlis, kuriame yra bent trys taškai. Apie kvadratėlį apibrėžto apskritimo spindulys lygus $\frac{\sqrt{2}}{10}$. Radome apskritimą, kurio viduje ar pačiame apskritime yra bent trys taškai. Kadangi $\frac{\sqrt{2}}{10} = \sqrt{\frac{1}{50}} < \frac{1}{7}$, tai galima nubrėžti tokį koncentrišką apskritimą, kurio spindulys lygus $\frac{1}{7}$, ir minėti taškai jau atsiduria apskritimo viduje.

192. Iš pradžių panagrinėkime uždavinį, laikydami medį tašku. Vieną kvadrato kraštinę (lygią 1000 m) padalykime į $\frac{1000}{10} = 100$ dalių, o gretimą — į $\frac{1000}{20} = 50$ dalių. Išvedę per dalijimo taškus tieses, lygiagrečias kvadrato kraštinėms, gausime $100 \times 50 = 5000$ stačiakampių aikštelių. Kadangi „medžių" (taškų) yra 4500, tai atsiras aikštelė (ir net 500 tokių aikštelių), kurios viduje nėra medžių. Blogiau, jeigu norime, kad medžių nebūtų ir ant aikštelės kraštų — tada juk gali atsitikti, kad medis priklauso iš karto keturioms aikštelėms. Apeiti šį sunkumą galima taip. Dalykime vieną kvadrato kraštinę į 99 lygias dalis, o kitą — į 49. Tada gausime $99 \cdot 49 = 4900 - 49 = 4851$ aikštelę, ir bent vienos iš jų (iš tikrųjų — bent 351 iš jų) viduje nebus „medžių". Aikštelės kraštai lygūs $\frac{1000}{99} = 10,1...$ ir $\frac{1000}{49} = 20,4...$, todėl jos viduje galima nubraižyti stačiakampį 10×20, kuris nebeturės „medžių" nei viduje, nei ant savo kraštinių.
Dabar jau aišku, ką daryti su „realiais" medžiais, kurių skersmuo 0,5. Sakykime, kad medis priklauso aikštelei, jeigu jo skerspjūvio centro projekcija priklauso aikštelei. Jeigu rastume aikštelę, pavyzdžiui, $10,6 \times 20,6$, kurios viduje nėra medžių, tai sumažinę aikštelę (pastūmę jos kraštus į vidų per 0,3) gautume aikštelę, kurioje nėra medžių: net jeigu didesnėje aikštelėje buvo medis, tai jo spindulys lygus 0,25, ir naujos aikštelės nė vienas medžio taškas nebepasiekia (juo labiau jos nepasiekia kitų aikštelių medžiai).
Taigi reikia padalyti kvadratą į bent 4501 stačiakampį. Anksčiau dalijome į 100×50 ir į 99×49 stačiakampių, dabar jų imame šiek tiek mažiau. Dalykime vieną kvadrato kraštinę į 94 dalis, kitą — į 48. Gausime $94 \times 48 = 4512$ aikštelių, kurių matmenys 20,8... ir 10,6.... Kadangi medžių yra 4500, tai rasime aikštelę (ir net bent 12), kurios viduje medžių nėra. Sumažinę ją iki 20×10 gausime aikštelę, kurios nesiekia nei vienas medžio taškas.

193. Aišku, kad daugiakampis negali turėti bukų kampų (žr. paveikslėlį): jeigu n-kampis turi bukąjį kampą, tai nesunku nurodyti jo viduje tašką, iš kurio nuleistas statmuo krenta į kraštinės tęsinį. Vadinasi, n-kampio kiekvienas kampas $\leqslant 90°$, o jo kampų suma $\leqslant 90°n$. Kita vertus, n-kampio kampų suma lygi $180°(n-2)$. Todėl $180°(n-2) \leqslant 90°n$, $90n \leqslant 2 \cdot 180$, $n \leqslant 4$.



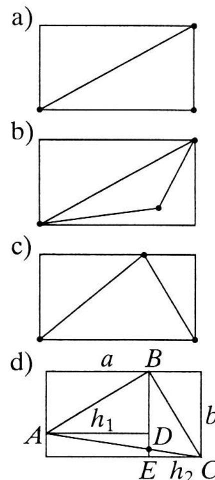
Jeigu $n = 4$, tai keturkampio kampų suma lygi 360°. Vadinasi, visi jo kampai statūs (jeigu bent vienas kampas $< 90°$, tai kampų suma būtų $< 90° + 3 \cdot 90°$, t. y. mažesnė už 360°). Gauname stačiakampį, o jis tikrai pasižymi reikalaujama savybe.
Jeigu $n = 3$, tai gauname trikampius, neturinčius bukųjų kampų, t. y. stačiuosius ir smailiuosius trikampius. Akivaizdu, kad tikrai juose statmenys iš vidaus taško kerta vidinius kraštinių taškus.
Taigi sąlygą tenkina tik smailieji ir statieji trikampiai bei stačiakampiai.
Pastaba. Žinoma, sprendžiant visiškai neprireikė Dirichlė principo. Galima remtis kraštinio elemento metodu: nagrinėkime didžiausią kampą, jis negali būti bukas, todėl kiekvienas kampas $\leqslant 90°$.

194. Netiesa, nes galima rasti net 33 skaičius, tarp kurių nėra nei vieno, kuris būtų du kartus didesnis už kitą. Pavyzdžiui, tokie yra skaičiai 1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, ..., 49, 50. Nesunku suvokti, kaip parinkti šie skaičiai. Imkime didžiausią skaičių 50. Aišku, kad imti 25 negalima, o paėmus visus skaičius nuo 26 iki 50, net didžiausio ir mažiausio iš jų santykis mažesnis už 2. Prie jų galima prijungti, pavyzdžiui, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 3, 2.
Pastaba. Uždavinys siejasi su 196 uždaviniu.

195. Kvadratą suskaidykime į 50 lygių stačiakampių, kurių plotai $\frac{1}{50}$, o kraštinių ilgiai yra, pavyzdžiui, 0,2 ir 0,1. Čia „narveliai" — stačiakampiai, o „triušiai" — taškai. Kadangi stačiakampių yra 50, o taškų 101, tai pagal Dirichlė principą bus stačiakampis, kuriame yra daugiau kaip 2 taškai. Kadangi jokie trys taškai

nepriklauso vienai tiesei, tai tie taškai yra tam tikro trikampio viršūnės. Gerai žinoma, kad trikampio plotas yra ne didesnis už stačiakampio, kuriame jis yra, ploto S pusę (žr. Lemą toliau). Kadangi $S = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02$, tai $S_{ABC} \leqslant \leqslant 0{,}5 \cdot 0{,}02 = 0{,}01$.

Lema. *Stačiakampyje esančio trikampio plotas yra ne didesnis už stačiakampio ploto pusę.*



Lemos įrodymas. Galime sakyti, kad trikampis įbrėžtas į stačiakampį (priešingu atveju stačiakampio kraštines lygiagrečiai stumsime į vidų tol, kol jos pasieks trikampio viršūnes, o stačiakampio plotas tik sumažės). Kadangi visos keturios stačiakampio kraštinės turi po trikampio viršūnę, tai mažiausiai viena trikampio viršūnė priklauso dviem stačiakampio kraštinėms, t. y. sutampa su stačiakampio viršūne. Jei tokios yra visos trys trikampio viršūnės, tai trikampis tiesiog yra stačiakampio pusė (žr. a) brėžinį). Jei tokios viršūnės dvi ir jos yra priešingos stačiakampio viršūnės, tai trikampis yra pusės stačiakampio viduje (žr. b) brėžinį). Pagaliau jei tokių viršūnių dvi, tai trikampio pagrindas sutampa su stačiakampio kraštine (a), o jo aukštinė lygi stačiakampio kitai kraštinei (b), taigi trikampio plotas ($\frac{1}{2}ab$) yra kaip tik pusė stačiakampio ploto (ab) (žr. c) brėžinį). Pagaliau sakykime, kad tik viena trikampio viršūnė C sutampa su stačiakampio viršūne, o A ir B yra kitose stačiakampio kraštinėse (žr. d) brėžinį). Per trikampio viršūnę B nubrėžkime tiesę BE, lygiagrečią stačiakampio kraštinei. Nubrėžtoji tiesė dalija stačiakampį į du stačiakampius, o trikampį ABC į du trikampius ABD ir BDC. $S_{ABD} = \frac{BD \cdot h_1}{2}$, $S_{CBD} = \frac{BD \cdot h_2}{2}$, o $S_{ACB} = \frac{BD \cdot h_1}{2} + \frac{BD \cdot h_2}{2} = \frac{BD}{2}(h_1 + h_2) = \frac{BD \cdot a}{2} < \frac{a \cdot b}{2} = \frac{1}{2}S$; čia a ir b — stačiakampio kraštinių ilgiai, S — stačiakampio plotas. Lema įrodyta. Įdomu, kad lemai įrodyti nereikia nė ploto formulių. Atvejais a) ir b) tai aišku: trikampis „mažesnis" už pusę stačiakampio. Atveju c) nuleidžiame trikampio aukštinę, kuri dalija ir trikampį, ir stačiakampį į du. Kairysis trikampis yra pusė kairiojo stačiakampio (plg. atvejį a)), dešinysis — pusė dešiniojo. Pagaliau atveju d) dešinysis trikampis BDC telpa dešiniojo trikampio pusėje BEC (plg. atvejį b)), o kairysis trikampis ABO yra viduje trikampio ABE, kuris yra pusė kairiojo stačiakampio (plg. atvejį c)). Toks įrodymas prieinamas ir jaunesniųjų klasių mokiniams.

196. Yra 100 nelyginių skaičių, mažesnių už 200. Sudarykime „narvelius", į kuriuos įeitų skaičiai a, $2a$, $4a$, $8a$, $16a$, …; čia a — nelyginis skaičius, mažesnis už 200. Čia „narveliai" — nelyginių skaičių, padaugintų iš dvejeto laipsnių, rinkiniai, o „triušiai" — išrinktieji skaičiai. Kiekvienas iš jų patenka į vieną „narvelį". Kadangi išrinktas 101 skaičius, o „narvelių" yra 100, tai pagal Dirichlė principą bus „narvelis", kuriame yra bent du skaičiai. Aišku, kad iš dviejų „narvelio" skaičių vienas dalijasi iš kito.

197. Tarkime, kad nėra dviejų berniukų, suvalgiusių po vienodai riešutų. Sunumeruokime berniukus suvalgytų riešutų didėjimo tvarka. Tada pirmas berniukas suvalgė $\geqslant 0$ riešutų, antras — $\geqslant 1$ riešutą, trečias — $\geqslant 2$ riešutus, ..., 21-mas — $\geqslant 20$ riešutų. Tada visi jie suvalgė ne mažiau kaip $\geqslant 0 + 1 + 2 + \cdots + 20 = 210$ riešutų. Prieštara, nes riešutų buvo tik 200.

198. Išrikiuokime gyventojus pagal amžių ir imkime 100 pačių vyriausių. Įrodysime, kad jų metų suma ne mažesnė kaip 3100 metų. Tarkime, kad atrinkto šimto gyventojų metų suma mažesnė už 3100. Tuomet jauniausio iš jų amžius mažesnis už $3100 : 100 = 31$ metus. Vadinasi, kiekvieno, neįėjusio į šimtą, amžius taip pat mažesnis už 31 metus. Taigi žmonių, nepatekusių į šimtą, metų suma mažesnė už $31 \cdot 23 = 713$ metų, o visų gyventojų metų suma mažesnė už $3100 + 713 = 3813$, o tai prieštarauja uždavinio sąlygai. Beje, seniausių gyventojų metų suma lygi 3100 tada ir tik tada, kai visų gyventojų amžius vienodas — 31 metai.

Kitas būdas. Visų 123 gyventojų amžiaus vidurkis yra $3813 : 123 = 31$ metai. Aišku, kad 100 vyresniųjų amžiaus vidurkis ne mažesnis. Todėl to 100 vyresniųjų amžiaus suma ne mažesnė už $31 \cdot 100 = 3100$ metų.

Pastaba. Sprendžiant 197 ir 198 uždavinius *taikomas kraštinio elemento metodas*: nagrinėk suvalgiusius daugiausiai, nagrinėk vyriausius.

199. *Nurodymas.* Prieš sprendžiant 199 uždavinį verta išspręsti kitą, panašų į jį, tik su mažesniais skaičiais.

Įrodykite, kad iš 9 skirtingų natūraliųjų skaičių, ne didesnių už 15, visuomet galima paimti tris tokius skaičius, iš kurių dviejų suma būtų lygi trečiajam.

Įrodymas. Turime 9 skaičius, ne didesnius už 15. Išrinkime iš jų didžiausią. Surašykime visus to didžiausio skaičiaus ir mažesnių už jį išrinktųjų skaičių skirtumus. Tų skirtumų yra 8, be to, visi jie skirtingi ir mažesni už 15. Pradinių skaičių skaičiaus ir skirtumų skaičiaus suma yra $9 + 8 = 17$. Ji didesnė už 15. Todėl pagal Dirichlė principą galėsime rasti tokį skirtumą, kuris sutaps su vienu iš duotųjų skaičių, $a - b = c$. Tada $a = b + c$. O tai ir reikėjo įrodyti.
Dabar išspręsime 199 uždavinį.
Duoti 986 skaičiai, mažesni už 1969. Išrinkime iš jų didžiausią ir pažymėkime jį N. Dabar nagrinėkime skaičiaus N ir kiekvieno kito iš duotųjų skaičių skirtumus. Tokių skirtumų bus 985, visi jie bus skirtingi ir mažesni už 1969. Duotųjų skaičių skaičiaus ir skirtumų skaičiaus suma yra $986 + 985 = 1971$ („triušiai"). Ji didesnė už 1969 („narveliai"). Atsiras du skaičiai, pakliuvę į vieną „narvelį", t. y. lygūs. Bet tai negali būti du iš duotųjų skaičių — jie pagal sąlygą nelygūs. Nelygūs ir nagrinėjami skirtumai. Todėl tai bus skirtumas $m - n$, kuris sutampa su vienu iš duotųjų skaičių t. Tarp duotųjų 986 skaičių radome tris tokius skaičius m, n ir t, kad $m = n + t$, o tai ir reikėjo įrodyti.
Uždavinio teiginys taps neteisingas, jei skaičių 986 pakeisime skaičiumi 985. Iš tikrųjų, pakanka imti visus nelyginius skaičius, ne didesnius už 1969; jų kaip tik yra 985, o dviejų nelyginių skaičių suma yra lyginis skaičius.

200. Pažymėkime bendrąjį sekos narį a_n. Tada $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2, \ldots$, o seka sudaroma pagal taisyklę $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Nagrinėkime liekanas, gaunamas dalijant sekos narius iš 10 000. Pažymėkime skaičiaus a_n liekaną r_n. Iš pradžių, kol a_n mažesni už 10 000, liekanos r_n sutaps su pačiais skaičiais, o po to jau nebe.
Panagrinėkime, kaip susijusios sekos narių liekanos. Raskime a_{n+2} liekaną r_{n+2}, kai žinome a_n ir a_{n+1} liekanas r_n ir r_{n+1}. Aišku, kad jeigu $r_n + r_{n+1} < 10\,000$, tai $r_{n+1} = r_n + r_{n+1}$, o jeigu $r_n + r_{n+1} \geqslant 10\,000$, tai $r_{n+1} = r_n + r_{n+1} - 10\,000$ (prisiminkite — lygiai taip pat randame paskutinį dviejų skaičių sumos skaitmenį: jeigu paskutinių skaitmenų suma mažesnė už 10, tai skaitmenis tiesiog sudedame, o jei didesnė už 10 — atimame 10). Mums svarbiausia tai, kad visada sumos liekana nustatoma vienareikšmiškai pagal dėmenų liekanas. Vartodami ženklą $\equiv$, kuris reiškia, kad abiejų skaičių, tarp kurių jis parašytas, liekanos lygios, visada galime parašyti:

$$r_{n+2} \equiv r_n + r_{n+1}. \qquad (1)$$

Iš šio lyginio aišku, kad ne tik r_{n+2} vienareikšmiškai nustatomas pagal r_n ir r_{n+1}, bet ir apskritai — žinodami dvi liekanas iš trijų nustatome trečią (pavyzdžiui, jei žinome r_{n+2} ir r_n, tai vienareikšmiškai randame r_{n+1}: $r_{n+1} = r_{n+2} - r_n$, jei $r_{n+2} - r_n \geqslant 0$, ir $r_{n+1} = r_{n+2} - r_n + 10\,000$, jei $r_{n+2} - r_n < 0$).
Taikykime Dirichlė principą. Skirtingų liekanų r_n yra ne daugiau kaip 10^4, o skirtingų liekanų porų pagal sandaugos taisyklę — ne daugiau kaip 10^8. Nagrinėkime $10^8 + 1$ liekanų porą: (r_1, r_2), (r_2, r_3), $(r_3, r_4), \ldots, (r_{10^8+1}, r_{10^8+2})$. Aišku, kad bent dvi iš šių porų sutampa, taigi yra tokie n ir m, $n < m$, kad

$$r_n = r_m, \quad r_{n+1} = r_{m+1}. \qquad (2)$$

Remiantis (1) lyginiu

$$r_{n+1} \equiv r_{n-1} + r_n, \quad r_{m+1} \equiv r_{m-1} + r_m.$$

Bet r_{n-1} pagal r_{n+1} ir r_n nustatoma vienareikšmiškai, o r_{m-1} vienareikšmiškai nustatoma pagal r_{m+1} ir r_m. Dabar remiantis (2) lygybe kiekvienos iš pastarųjų dviejų lyginių dvi liekanos lygios, todėl lygios ir trečiosios liekanos, $r_{n-1} = r_{m-1}$.
Analogiškai: $r_n = r_m$ ir $r_{n-1} = r_{m-1}$, tai $r_{n-2} = r_{m-2}$ ir t. t. Pagaliau gausime $r_2 = r_{m-n+2}$ (indeksų skirtumas vis tas pats: $m - n$) ir $r_1 = r_{m-n+1}$. Bet $r_1 = a_1 = 1$, $r_2 = a_2 = 1$, todėl iš lyginio $r_{m-n+2} \equiv r_{m-n} + r_{m-n+1}$, gauto pagal (1) formulę, turime $1 \equiv r_{m-n} + 1$, o tai reiškia, kad $r_{m-n} = 0$. Savo ruožtu tai reiškia, kad a_{m-n} dalydami iš 10^4 gauname liekaną 0. Vadinasi, skaičius a_{m-n} baigiasi keturiais nuliais.

201. Išnagrinėkime seką skaičių: $1, 11, 111, 1111, \ldots, \underbrace{111\ldots1}_{1978}$. Dalijant skaičius iš 1977 yra ne daugiau kaip 1977 liekanos (čia „narveliai" — liekanos, o „triušiai" — skaičiai). Pagal Dirichlė principą egzistuoja du šios eilutės skaičiai, kuriuos dalijant iš 1977 gaunamos vienodos liekanos. Iš didesniojo skaičiaus atėmę

mažesnįjį, gausime skaičių, užrašytą vienetais ir nuliais, kuris bus skaičiaus 1977 kartotinis. Uždavinys išspręstas.

Pastaba. Įdomu, kad užtenka imti seką iš 1977 skaičių. Negana to, galima teigti, kad joje bus 1977 kartotinis (kitaip sakant, bus toks skaičiaus 1977 kartotinis, kuris užrašomas vien vienetais). Tarkime priešingai, kad kartotinio nėra. Tada nė vieno skaičiaus dalybos iš 1977 liekana nelygi 0. Kadangi nelygių nuliui liekanų yra 1976 $(1, 2, \ldots, 1976)$, o sekoje skaičių yra 1977, tai bent du iš jų turės tą pačią liekaną. Vadinasi, jų skirtumas $111...11...1 - 1...1 = 111...10...0$ dalijasi iš 1977. Kadangi 1977 neturi nei daugiklio 2, nei 5, tai iš 1977 dalijasi skaičius 111...1. Prieštara, nes nė vienas toks skaičius (turintis ne daugiau kaip 1977 skaitmenis) pagal prielaidą nesidalija iš 1977.

Dabar galime grįžti prie pradinio sprendimo (jo privalumas — nesinaudojama prieštaros metodu). Gavę skaičių 111...100...0, kuris yra 1977 kartotinis, galime teigti, kad ir skaičius be nulių yra 1977 kartotinis. Gauname ne daugiau kaip 1977 vienetukus turintį skaičių 11...1, kuris dalijasi iš 1977.

202. *Nurodymas.* Prieš sprendžiant 202 uždavinį verta išspręsti kitą, panašų į jį, tik su mažesniais skaičiais.

Įrodykite, kad yra toks skaičiaus 7 kartotinis, kurio visi skaitmenys lygūs 1.

Įrodymas. Išnagrinėkime skaičių seką 1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111. Čia „narveliai“ — liekanos, gautos skaičių dalijant iš 7, o „triušiai“ — skaičiai. Pagal Dirichlė principą egzistuoja du skaičiai, kuriuos dalijant iš 7 gaunamos vienodos liekanos. Tuomet tų skaičių skirtumas dalijasi iš 7 be liekanos. Liekanos, gautos dalijant duotuosius skaičius iš 7, atitinkamai lygios 1, 4, 3, 5, 2, 0, 1, 4. Matome, kad iš tikrųjų lygios yra liekanos, gaunamos dalijant 1 ir 1111111 (arba 11 ir 11111111) iš 7. Skirtumas $1111111 - 1 = 1111110$ dalijasi iš 7, taigi ir skaičius 111111 dalijasi iš 7.

Beje, čia liekanų nagrinėjimas tik garantuoja, kad anksčiau ar vėliau skaičius 11...1 pasidalys iš 7. Kadangi čia galima tiesiog dalyti kampu, tai greitai nustatome, kad jau 111111 dalijasi iš 7.

Dabar išspręskime 202 uždavinį.

Nagrinėkime skaičių seką 1, 11, 111, ..., $\underbrace{111...1}_{1994}$. Čia vėl „narveliai“ — liekanos, „triušiai“ — skaičiai. Skirtumas, palyginti su dalyba iš 7, čia tas, kad faktiškai dalyti neįmanoma. Pagal Dirichlė principą egzistuoja du skaičiai, kuriuos dalijant iš 1993 gaunamos vienodos liekanos. Tuomet tų skaičių skirtumas dalijasi iš 1993. Tarkime, kad tie skaičiai yra $\underbrace{111...1}_{m}$ ir $\underbrace{111...1}_{m+n}$. Iš didesniojo skaičiaus atėmę mažesnįjį, gautume skaičių $\underbrace{111...1}_{n}\underbrace{000...0}_{m}$, kuris dalijasi iš 1993. Kadangi 1993 neturi daliklių 2 ir 5, tai ir $\underbrace{11...1}_{n}$ dalijasi iš 1993. (Įrodėme net truputėlį daugiau, nei reikalauta: yra toks skaičius, užrašomas ne daugiau kaip 1993 vienetais, kuris dalijasi iš 1993.)

203. Išnagrinėkime du atvejus:

1) Tarkime, kad yra 9 skaičiai, kuriuos dalijant iš 9 gaunamos 9 skirtingos liekanos. Tuomet liekanų suma lygi 36 $(0+1+2+3+4+5+6+7+8 = 36)$, taigi visų devynių skaičių suma dalijasi iš 9 be liekanos.
2) Tarkime, kad nėra 9 skaičių, kuriuos dalydami iš 9 gautume 9 skirtingas liekanas. Tuomet didžiausias skirtingų liekanų skaičius gali būti 8. Kadangi $65 = 8 \cdot 8 + 1$, tai pagal Dirichlė principą yra bent 9 skaičiai, kuriuos dalijant iš 9 gaunama vienoda liekana. Tų skaičių suma bus dali iš 9.

204. Dalijant skaičius iš 7 didžiausias skirtingų liekanų skaičius gali būti 7. Kadangi $100 = 7 \cdot 14 + 2$, tai pagal Dirichlė principą tarp duotųjų 100 skaičių yra mažiausiai 15 skaičių, kuriuos dalijant iš 7 gaunama ta pati liekana. Tuomet bet kurių dviejų skaičių, paimtų iš minėtų 15 skaičių skirtumas dalijasi iš 7 be liekanos.

205. Dalijant skaičius iš 11 galima gauti ne daugiau kaip 11 skirtingų liekanų. Kadangi skaičių turime 12, tai yra mažiausiai 2 skaičiai, kuriuos dalydami iš 11 gauname vienodas liekanas. Tų skaičių skirtumas dalijasi iš 11 be liekanos ir yra mažesnis už 99. Bet skirtumas yra skaičiaus 11 kartotinis, o visų vienuolikos kartotinių, ne didesnių už 99, skaitmenys yra vienodi.

Šį skyrelį galima laikyti pačiu sunkiausiu šiame skyriuje. Kraštinio elemento metodo esmę gerai atspindi 1 pavyzdys. Sąlyga baisoka, bet sprendimas — trivialus. Silpnesniems mokiniams galima pasiūlyti išspręsti analogišką uždavinį imant ne 100-kampį, o pavyzdžiui 4-kampį. Aišku, svarbiausia čia pastebėti, kad sąlygoje nurodyta, jog surašyti skaičiai yra skirtingi, vadinasi tarp jų yra mažiausias ir yra didžiausias.

Panagrinėkime 2 pavyzdį. Čia pirmiausia reikia teisingai suprasti sąlygą:

1) reikia sudėlioti visas 44 monetas;

2) monetų skaičius kišenėse turi būti skirtingas (gali likti viena tuščia kišenė, bet daugiau tuščių kišenių likti negali).

Po to pasiūlykite mokiniams pabandyti sudėlioti monetas. Natūralu bandyti dėlioti taip:

į pirmą kišenę dėti 1 monetą (liko 43),
į antrą — 2 monetas (liko 41),
į trečią — 3 monetas (liko 38),
kartu skaičiuojant kiek monetų liko neįdėtų.

Tęskime:

į ketvirtą — 4 monetas (liko 34),
į penktą — 5 monetas (liko 29),
į šeštą — 6 monetas (liko 23),
į septintą — 7 monetas (liko 16),
į aštuntą — 8 monetas (liko 8).

Čia tenka sustoti — turime dvi tuščias kišenes ir 8 monetas. Aišku, kad likusių 8 monetų negalima sudėlioti į dvi kišenes taip, kad visose kišenėse monetų skaičius būtų skirtingas. Čia jau beveik akivaizdu, kad norimu būdu sudėlioti nepavyks. Tiesa, toks įsitikinimas kiek susvyruoja pasiūlius dėti monetas į kišenes kitaip, pavyzdžiui, į trečią kišenę dėti ne 3, bet 4 monetas ir t. t. Akivaizdu, kad surašyti visus įmanomus variantus — ilgas užsiėmimas.

Mūsų prielaidą, jog sudėti monetų negalima, reikia įrodyti. Toliau galima samprotauti, kaip pateikta vadovėlyje (žr. sprendimą).

Pastaba. Prieštaros metodas kartais mokiniams sunkiai suvokiamas. Todėl gali būti naudinga aiškinti sprendimą taip:

Bandykime išdėlioti 44 monetas į 10 kišenių. Aš turiu į vieną kišenę dėti 0 monetų — kitaip dešimtyje kišenių būtų ne mažiau kaip $1+2+\cdots+9+10=55$ monetos. Dabar aš turiu į vieną kišenę dėti 1 monetą — kitaip kišenėse būtų ne mažiau kaip $0+2+3+\cdots+10=54$ monetos. Toliau aš turiu dėti į kurią nors kišenę 2 monetas, kitaip kišenėse būtų ne mažiau kaip $0+1+3+4+\cdots+10=53$ monetos. Dabar aš turiu dėti į kišenę 3 monetas — kitaip kišenėse būtų ne mažiau kaip $0+1+2+4+5+\cdots+10=52$ monetos. Lygiai taip pat aš turiu dėti 4 monetas, 5 monetas, 6 monetas, 7 monetas. Dabar aš turiu dėti ir 8 monetas — kitaip kišenėse būtų ne mažiau kaip $0+1+2+3+4+5+6+7+9+10=47$ monetos. Taigi aš priverstas sudėti 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 monetas. Man liko 8 monetos ir viena kišenė, bet 8-ių monetų kišenė jau yra, taigi sudėti norimu būdu 44 monetas neįmanoma.

Tą patį sprendimą galima išdėstyti dar kitaip. Kiek daugiausiai monetų aš galiu dėti į kišenę? Tik aštuonias. Iš tikrųjų, jei dėčiau 9 monetas ar daugiau, kišenėse būtų ne mažiau kaip $9+0+1+2+3+4+5++6+7+8=45$ monetos. Vadinasi, monetas aš turiu sudėti į 10 kišenių, kurių kiekvienoje gali būti nuo 0 iki 8 monetų (9 „narveliai“). Pagal Dirichlė principą atsiras bent 2 kišenės, kuriose monetų skaičius vienodas. Taigi monetų sudėlioti nepavyks.

Įdomu, kad pateiktas sprendimas panašus į uždavinio su 45 monetomis sprendimą (tada sudėlioti monetas galima!). Kiek daugiausiai monetų aš galiu dėti į vieną kišenę? Tik 9. Iš tikrųjų, jei dėčiau 10 monetų ar daugiau, kišenėse būtų ne mažiau kaip $10+0+1+\cdots+8==46$ monetos. Taigi į vieną kišenę dedu 9 monetas. Lieka 36 monetos ir 9 kišenės. Reikia sudaryti sumą 36 iš 9 skirtingų dėmenų 0–8. Bet mažiausių įmanomų dėmenų suma $0+1+2+\cdots+8=36$. Jei bent vienas dėmuo būtų didesnis, tai suma būtų didesnė už 36. Vadinasi, iš esmės tėra vienas būdas sudėlioti 45 monetas: dėti 0, 1, 2, ..., 8, 9 monetas.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

206. Tarkime, kad surašėme grybautojus jų surinktų grybų skaičiaus mažėjimo tvarka. Aišku, kad pirmieji trys grybautojai surinko daugiau grybų negu bet kuris kitas trejetas. Įrodykime, kad jie surinko ne mažiau kaip 50 grybų. Jeigu trečią vietą užėmęs grybautojas surinko 16 arba daugiau grybų, tai antroje vietoje esantis grybautojas surinko ne mažiau kaip 17 grybų, o pirmoje — ne mažiau kaip 18 grybų. Kartu jie surinko ne mažiau kaip $16+17+18=51$ grybą. Jeigu trečiąją vietą užėmęs grybautojas surinko ne daugiau kaip 15 grybų, tai grybautojai, užėmę nuo ketvirtos iki septintos vietos, surinko ne daugiau kaip $14+13+12+11=50$ grybų. Tuomet pirmasis trejetas surinko ne mažiau kaip 50 grybų. Beje, gali atsitikti, kad tam tikri trys grybautojai surinko lygiai 50 grybų. Pavyzdžiui, pirmi trys grybautojai atitinkamai surinko 19, 16, 15 arba 18, 17, 15.

207. Išnagrinėkime kraštinį atvejį — raskime sumą 5 didžiausių trupmenų, kurių skaitikliai lygūs 1, o vardikliai nelyginiai skaičiai: $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}$. Nesunku įsitikinti, kad ši suma mažesnė už 1: ji mažesnė net už $0{,}34+0{,}20+0{,}15+0{,}12+0{,}10=0{,}91$. Galima skaičiuoti su paprastosiomis trupmenomis: įsitikinkime, kad atėmę iš vieneto $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}$ gausime teigiamą skaičių (tai ir reiškia, kad minima suma mažesnė už 1):
$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}-\frac{1}{5}=\frac{10-3}{3\cdot5}=\frac{7}{3\cdot5}$, $\frac{7}{3\cdot5}-\frac{1}{7}=\frac{49-15}{3\cdot5\cdot7}=\frac{34}{3\cdot5\cdot7}$, $\frac{34}{3\cdot5\cdot7}-\frac{1}{9}=$
$=\frac{3\cdot34-5\cdot7}{5\cdot7\cdot9}=\frac{67}{5\cdot7\cdot9}$, $\frac{67}{5\cdot7\cdot9}-\frac{1}{11}=\frac{67\cdot11-5\cdot7\cdot9}{5\cdot7\cdot9\cdot11}=\frac{670+67-350+35}{5\cdot7\cdot9\cdot11}=\frac{422}{5\cdot7\cdot9\cdot11}$.
Bet kurių kitų trupmenų, tenkinančių uždavinio sąlygą, suma mažesnė. Taigi duotųjų trupmenų suma negali būti lygi 1.
Uždavinys išspręstas. Beje, nei 6, nei 7, nei 8 tokių trupmenų suma negali, o tik 9 trupmenų suma gali būti lygi vienetui (4 sprendiniai; žr. žurnalo „$\alpha+\omega$“ 2002 m. Nr. 1, p. 70).

208. Uždavinio sąlygą reikia patikslinti. *Yra 100 kubelių. Kiekvieno kubelio siena nudažyta arba raudonai, arba mėlynai, arba žaliai. 80 kubelių turi bent vieną raudoną sieną, 85 — bent vieną mėlyną, 75 — bent vieną žalią. Kiek mažiausiai kubelių turi visų spalvų sienų?*
Iš pradžių išspręskime pakoreguotąjį uždavinį. Raudonos sienos neturi 20 kubelių, mėlynos — 15, žalios — 25. Vadinasi, bent vienos spalvos sienų neturi ne daugiau kaip $20+15+25=60$ kubelių, todėl visų spalvų sienų turi ne mažiau kaip 40 kubelių. Kad įmanomas 40 kubelių atvejis, rodo toks pavyzdys: 40RMŽ (tai reiškia, kad 40 kubelių turi visų spalvų sienų), 20MŽ, 15RŽ, 25MR.
Grįžkime prie vadovėlio uždavinio, kai reikėtų atsakyti į klausimą: kiek kubelių gali turėti visų spalvų sienų? Atsakymas būtų toks: visų spalvų sienų gali turėti bet kiek kubelių nuo 40 iki 70.
Įsitikinkime, kad $x\leqslant 70$ (x pažymėjome trispalvių kubelių skaičių). Netrispalvių kubelių yra $100-x$. Netrispalvių raudonų yra $80-x$, mėlynų $85-x$, žalių $75-x$. Vadinasi, $80-x+85-x+75-x\geqslant 100-x$, $x\leqslant 70$.
Atvejis, kai trispalvių kubelių yra lygiai 70, taip pat įmanomas: raudonų kubelių tegu bus $80-70=10$, mėlynų $85-70=15$, žalių $75-70=5$. Tada uždavinio sąlygos įvykdytos. Nesunku parinkti pavyzdžių, kad įmanomas ir kiekvienas kitas atvejis: $x=41,42,\ldots,69$.

Kitas būdas. Daug paprasčiau spręsti uždavinį, užrašius sąlygą lygtimis. Jeigu, pavyzdžiui, skaičių kubelių, kurių sienų spalvos yra tik R ir $Ž$, pažymėsime $RŽ$ (ir pan.), tai

$$MRŽ+MR+MŽ+RŽ+M+R+Ž=100, \quad (1)$$
$$MRŽ+MR+RŽ+R=80, \quad (2)$$
$$MRŽ+MR+MŽ+M=85, \quad (3)$$
$$MRŽ+RŽ+MŽ+Ž=75. \quad (4)$$

Kadangi lygtyse perteikta visa informacija, tai esame visiškai įsitikinę, kad visas reikiamas išvadas galima gauti iš lygčių. Matysime, kaip lygtys „galvoja“ už mus. Sudėję paskutines tris lygtis ir atėmę (1), gauname

$$2MRŽ+MR+MŽ+RŽ=140, \quad (5)$$

iš čia aišku, kad $2MRŽ\leqslant 140$,

$$MRŽ\leqslant 70. \quad (6)$$

Iš (5) lygties atėmę (1) gauname, kad

$$MRŽ-M-R-Ž=40, \quad (7)$$

iš kur aišku, kad

$$MRŽ\geqslant 40. \quad (8)$$

Taigi tiesiog pačios lygtys „rodo“ apatinį ir viršutinį $MRŽ$ rėžius. Pažymėkime $M+R+Ž=k$. Tada iš (7) gauname $MRŽ=40+k$, o iš čia ir (6) — kad $k\leqslant 30$. Vadinasi, $0\leqslant k\leqslant 30$.
Kai $k=0$, tai $R=0$, $M=0$, $Ž=0$. Kai $k=30$, tai iš (7) $MRŽ=70$, iš (5) $MR+MŽ+RŽ=0$, t. y. $MR=MŽ=RŽ=0$. Tada iš (2)–(4) $R=10$, $M=15$, $Ž=5$. Kadangi čia $R:M:Ž=2:3:1$, tai natūralu bandyti imti (ir su kitais k) $R=\frac{2k}{6}$, $M=\frac{3k}{6}$, $Ž=\frac{k}{6}$. Bet $R, M, Ž$ — sveikieji skaičiai,

$R + M + Ž = k$, todėl imkime $R = \left[\frac{k}{3}\right]$, $Ž = \left[\frac{k}{6}\right]$, $M = k - \left[\frac{k}{3}\right] - \left[\frac{k}{6}\right]$ (čia [] reiškia sveikąją dalį).

Atėmę (2) iš (1) gauname $MŽ + M + Ž = 20$, $\quad MŽ = 20 - k + \left[\frac{k}{3}\right]$,
atėmę (3) iš (1) gauname $RŽ + R + Ž = 15$, $\quad RŽ = 15 - \left[\frac{k}{3}\right] - \left[\frac{k}{6}\right]$,
atėmę (4) iš (1) gauname $MR + M + R = 25$, $\quad MR = 25 - k + \left[\frac{k}{6}\right]$.

Visos nežinomųjų reikšmės tenkina lygtis (1)–(4) ir yra neneigiamos. Tai įrodome remdamiesi akivaizdžiomis nelygybėmis $x - 1 < [x] \leqslant x$:

$M = k - \left[\frac{k}{3}\right] - \left[\frac{k}{6}\right] \geqslant k - \frac{k}{3} - \frac{k}{6} = \frac{k}{2} \geqslant 0$.

$MŽ = 20 - k + \left[\frac{k}{3}\right] > 20 - k + \frac{k}{3} - 1 = 19 - \frac{2k}{3} \geqslant 19 - \frac{2\cdot 30}{3} = -1$, t. y. $MŽ > -1$, o kadangi $MŽ$ sveikas, tai $MŽ \geqslant 0$.

$RŽ = 15 - \left[\frac{k}{3}\right] - \left[\frac{k}{6}\right] \geqslant 15 - \frac{k}{3} - \frac{k}{6} = 15 - \frac{k}{2} \geqslant 15 - \frac{30}{2} = 0$,

$MR = 25 - k + \left[\frac{k}{6}\right] > 25 - k + \frac{k}{6} - 1 = 24 - \frac{5k}{6} \geqslant 24 - \frac{5\cdot 30}{6} = -1$, t. y. $MR > -1$, arba $MR \geqslant 0$.

Vadinasi, kiekvienam k ($0 \leqslant k \leqslant 30$) nurodytas konkretus pavyzdys, kada ta reikšmė gaunama. Įrodėme, kad 208 uždavinio sąlygomis trispalvių kubelių skaičius x gali būti bet kuris natūralusis skaičius iš intervalo $30 \leqslant x \leqslant 70$.

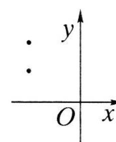
209. Pirmo uždavinio neišsprendė 20, antro — 30, trečio — 40, o ketvirto — 50 moksleivių. Vadinasi, neišsprendusių bent vieno uždavinio yra ne daugiau kaip 140 moksleivių. Todėl visus uždavinius išsprendė mažiausiai 60 moksleivių.
Atsakymas. Ne.

210. Mažiausias skaičius, kurį galime sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3 ir 4, yra 1234, o didžiausias — 4321. Skaičių, kurių pirmasis skaitmuo yra 2, kartotinių sudaryti negalima, nes $2134 \cdot 2 = 4268$ (skaitmenys 6 ir 8 neduoti), o kitų dvejetu prasidedančių skaičių kartotiniai didesni už $2314 \cdot 2 = 4628 > 4321$. Skaičių, kurių pirmasis skaitmuo 3 arba 4, kartotinių taip pat negalima sudaryti, nes jie būtų didesni už skaičių 4321. Lieka išnagrinėti skaičius, kurių pirmasis skaitmuo yra 1. Bet kurį iš šių skaičių dauginant iš 2 prireikia skaitmenų 6 ir 8, o dauginant iš 3 — skaitmenų 0, 3, 7 ir 9. Daugybos iš 4 rezultatas per didelis: $1234 \cdot 4 = 4936 > 4321$. Taigi nei vienas iš dviejų skaičių, sudarytų iš skaitmenų 1, 2, 3 ir 4, nesidalija vienas iš kito.

Kitas būdas. Didžiausio ir mažiausio iš skaičių santykis 4321 : 1234 mažesnis už 4, todėl santykis galėtų būti tik 3 arba 2. Santykis negali būti 3, nes tada didesnysis skaičius dalytųsi iš 3, o skaitmenų suma $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ iš 3 nesidalija. Santykis negali būti ir 2, nes tada didesnysis skaičius būtų užrašomas skaitmenimis 2, 4, 6, 8.

211. Tarkime, kad aibė yra baigtinė. Tuomet tarp tų taškų yra pats kairiausias taškas. Kadangi kiekvienas taškas yra atkarpos vidurio taškas, tai kairiau už minėtą yra dar vienas taškas. Gavome prieštarą. Vadinasi, tokių taškų aibė yra begalinė.

212. Tarkime, kad aibė yra baigtinė. Imkime kairiausią tašką (jeigu tokių taškų yra keli, imkime aukščiausiai esantį). Nagrinėkime atkarpą, kurios vidurio taškas jis yra. Jei atkarpa nėra vertikali, tai vienas iš jos galų bus kairiau, — prieštara. Jei atkarpa vertikali, tai jos viršutinis galas bus irgi pats kairiausias, bet aukščiau už nagrinėjamą tašką. Prieštara, nes iš visų kairiausių taškų nagrinėjamasis taškas yra aukščiausiai. Vadinasi, tokių taškų aibė yra begalinė.

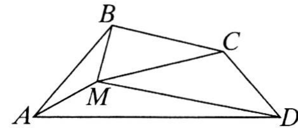


213. a) Tarkime, kad visi skaičiai yra skirtingi. Imkime skaičių a — mažiausią iš jų. Jo kaimynus iš skirtingų pusių pažymėkime b ir c. Tuomet $a < b$, $a < c$. Sudėję šias nelygybes gausime: $2a < b + c$, $a < \frac{b+c}{2}$. Prieštara. Vadinasi, visi skaičiai negali būti skirtingi.

b) Sakykime, kad yra 2 nelygūs skaičiai. Įsitikinkime, kad tada yra ir du nelygūs kaimyniniai skaičiai. Iš tikrųjų, jeigu kiekvieni du kaimynai būtų lygūs, tai pradėjus nuo bet kurio skaičiaus x_1 jo kaimynas x_2 pagal laikrodžio rodyklę būtų jam lygus. Tada $x_3 = x_2$, $x_4 = x_3, \ldots, x_7 = x_6$, $x_8 = x_7$, $x_1 = x_8$, ir visi skaičiai būtų lygūs.
Taigi raskime du nelygius kaimynus ir pažymėkime juos x_1 ir x_2 taip, kad x_2 būtų skaičiaus x_1 kaimynas pagal laikrodžio rodyklę. Sakykime, kad $x_1 > x_2$ (atvejis $x_1 < x_2$ nagrinėjamas visiškai taip pat). Kadangi x_2 yra x_1 ir x_3 vidurkis ir vidurkis mažesnis už x_1, tai vidurkis didesnis už x_3, t. y. $x_2 > x_3$. Bet x_3 yra x_2 ir x_4 vidurkis, ir lygiai taip pat $x_3 > x_4$. Tęsdami gauname $x_4 > x_5, \ldots, x_7 > x_8$, $x_8 > x_1$. Gavome, kad $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > x_8 > x_1$, t. y. $x_1 > x_1$. Prieštara.

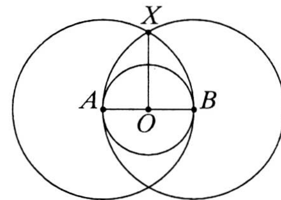
Kitas būdas. Jis tinka ir atveju a), ir atveju b). Iš visų aštuonių imkime mažiausią (jei jų keli — bet kurį iš jų). Pažymėkime jį x_1, o jo kaimyną pagal laikrodžio rodyklę x_2. Kadangi x_1 mažiausias, tai $x_1 \leqslant x_2$. Bet x_2 — skaičių x_1 ir x_3 vidurkis, todėl $x_2 \leqslant x_3$. Lygiai taip pat x_3 yra x_2 ir x_4 vidurkis, todėl $x_3 \leqslant x_4$. Tęsdami gauname $x_7 \leqslant x_8$, $x_8 \leqslant x_1$ (aštuntojo skaičiaus kaimynas pagal laikrodžio rodyklę yra x_1). Taigi $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots \leqslant x_7 \leqslant x_8 \leqslant x_1$. Iš čia matome, kad visi 8 skaičiai lygūs, todėl atsakymas tiek į klausimą a), tiek į klausimą b) neigiamas.

214. Keturkampio viduje paimkime bet kurį tašką M. Įrodysime, kad jį uždengia bent vienas skritulys. Sujunkime tašką M su keturkampio viršūnėmis. Nagrinėkime kampus AMB, BMC, CMD ir AMD. Kadangi tų keturių kampų suma lygi 360°, tai bent vienas kampas ne mažesnis už 90°. Sakykime, pavyzdžiui, kad $\angle AMB \geqslant 90°$.

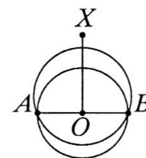


Nubrėžkime apskritimą, kurio skersmuo AB. Tuomet taškas M yra apskritimo viduje arba priklauso jam, taigi skritulys dengia tą tašką. Įrodėme, kad kiekvieną keturkampio tašką dengia bent vienas skritulys.

215. Pagalvokime, kaip praktiškai bandytume rasti tokį apskritimą. Natūralu paieškoti taškų, tarp kurių atstumas trumpiausias (jeigu tokių atstumų keli — imkime bet kurį). Pažymėkime taškus raidėmis A ir B. Kadangi bet kurio kito taško atstumas iki A ne mažesnis už AB, tai visi kiti taškai yra apskritimo su centru taške A ir spinduliu AB išorėje arba ant jo. Lygiai taip pat nei vieno taško nėra viduje apskritimo su centru taške B ir spinduliu AB (žr. paveikslėlį).

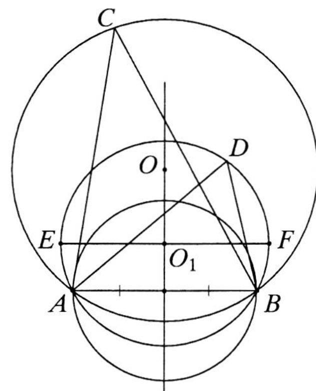


Pažymėkime O atkarpos AB vidurio tašką ir nubrėžkime apskritimą su centru O ir spinduliu $\frac{AB}{2}$ (kitaip sakant, nubrėžkime apskritimą, kurio skersmuo yra AB). Akivaizdu, kad nei ant apskritimo, nei jo viduje nėra duotųjų taškų. Kadangi tiesėje AB daugiau taškų nėra (žr. sąlygą), tai jų yra vienoje arba abiejose pusplokštumėse, į kurias plokštumą dalija tiesė AB. Sakykime, kad jų tikrai yra viršutinėje pusplokštumėje. Pastumkime vos vos pastarąjį apskritimą vertikaliai į viršų (t. y. centrą pastumkime atkarpos AB vidurio statmeniu link taško X — didžiųjų apskritimų susikirtimo taško). Jeigu apskritimo spindulys $\frac{AB}{2} = r$, tai $OX = r\sqrt{3}$ (nes $\triangle AXB$ — lygiakraštis), taigi „vos vos" reiškia: atstumu, mažesniu už $r\sqrt{3} - r$. Tada pakeltasis apskritimas dar nepasieks taško X ir bus „betaškėje" zonoje. Dabar įsivaizduokime, kad į apskritimą, kaip į balioną, įpučiame oro, kad jo spindulys vos vos padidėtų, bet nesiektų taško X. Nuleiskime dabar padidėjusį apskritimą žemyn, kad jis atsiremtų į taškus A ir B. Aišku, kad apatinis lankas AB bus pradinio apskritimo viduje.



O dabar viskas paprasta: pūskime apskritimą, kad jo spindulys didėtų, bet jis remtųsi į taškus A ir B. Ir pūskime tol, kol apskritimas pasieks bent vieną iš duotųjų taškų (jis gali pasiekti iš karto kelis ar net visus likusius taškus — pavyzdžiui, jeigu duotieji n taškų yra taisyklingojo n-kampio viršūnės arba apskritai priklauso vienam apskritimui). Gautasis apskritimas ir yra ieškomasis. Spręsdami rėmėmės, kaip sakoma, tolydumo ir fizikiniais sumetimais. Jeigu tokio vaizdumo atsisakytume, sprendimas taptų visiškai griežtas, bet gana sudėtingas (beje, įsigilinus į jį paaiškėja, kad iš esmės tai tas pats sprendimas, ta pati ieškojimo procedūra).

Išmatuokime atstumą tarp kiekvienų dviejų duotųjų taškų ir taikydami kraštinio elemento taisyklę nagrinėkime porą taškų A ir B, tarp kurių atstumas mažiausias. Nubrėžkime apskritimą, kurio skersmuo AB. Tuomet bet kuris iš duotųjų taškų (išskyrus A ir B) nutolęs nuo A ne mažiau kaip atstumu AB, todėl yra šio apskritimo išorėje (nes skritulyje, kurio skersmuo AB, tėra vienintelis taškas, nutolęs nuo A skersmens atstumu — tai taškas B). Lygiai taip pat kiekvienas iš tų $n-2$ taškų nutolęs nuo taško B ne mažiau kaip atstumu AB. Per du taškus A ir B ir per kiekvieną trečią iš kitų $n-2$ taškų brėžkime apskritimus. Iš jų išrinkime mažiausią. Sakykime, kad tai bus apskritimas, nubrėžtas per taškus A, B ir C. Įrodykime, kad šis apskritimas — ieškomasis. Jau įrodėme, kad $AC \geqslant AB$ ir $BC \geqslant AB$. Tuomet trikampio ABC kampas C smailusis. Tarkime, kad taškas D yra nagrinėjamo apskritimo viduje. Tuomet tašką D sujungę su taškais A ir B gautume trikampį ABD, kurio kampas ADB smailus. Apskritimų ACB ir ADB centrai O ir O_1 yra bendros stygos AB vienoje pusėje. Antrojo apskritimo lankas ADB yra apskritimo ACB viduje. Nubrėžkime apskritimo ADB skersmenį EF, lygiagretų stygai AB. Jis yra apskritimo ACB viduje, ir, vadinasi, apskritimas ADB mažesnis už apskritimą ACB. Tai prieštarauja apskritimo ACB pasirinkimui.



KARTOJIMO MEDŽIAGA

Vadovėlio II dalies pabaigoje glaustai pateikiama pagrindinės mokyklos matematikos kurso santrauka. Kartojimo medžiagą sudaro dvi dalys: pirmoji dalis skirta algebrai, funkcijoms, ekonomikos elementams ir statistikai, tikimybėms bei kombinatorikai; antroji — planimetrijai ir erdviniams kūnams. (Stereometrija neįtraukta į kartojimo medžiagą, nes ji yra šioje vadovėlio dalyje.) Kartojimo medžiagos pabaigoje pateiktos kompleksinės užduotys, apimančios visą pagrindinės mokyklos matematikos kursą.

Kiekviena dalis suskirstyta į skyrelius. Kiekvieną skyrelį sudaro teorinė medžiaga ir uždaviniai. Skyrelio teorinėje medžiagoje surašyti pagrindinės mokyklos matematikos kurso, atitinkančio nagrinėjamą matematikos sritį (tą skyrelį), svarbiausi dalykai: apibrėžimai, savybės, formulės, algoritmai. Kiekvieno skyrelio pabaigoje pateikiami uždaviniai, atitinkantys to skyrelio teorinę medžiagą.

Pastaba. Kartojimo medžiagoje pateikiamos tik visiems privalomos teorinės žinios bei uždaviniai. (Vadovėliuose esanti neprivaloma medžiaga į kartojimą neįtraukta.)

I DALIS

1. Skaitiniai ir raidiniai reiškiniai

1. a) 3; 4; b) -4; 3; 0; 4; c) $\frac{1}{3}$; -4; 3; $-0{,}5$; 0; 4; $-\frac{2}{3}$; d) $\frac{1}{3}$; 3; $\frac{\pi}{2}$; 0; 4; e) -4; $-0{,}5$; $-\sqrt{2}$; 0; $-\frac{2}{3}$; f) -4 ir 4; g) $\frac{1}{3}$ ir 3; h) $\frac{\pi}{2}$; $-\sqrt{2}$; i) $\frac{1}{3}$; -4; 3; $-0{,}5$; $\frac{\pi}{2}$; $-\sqrt{2}$; 0; 4; $-\frac{2}{3}$.

2. a) 1,97; b) -11; c) $\frac{3}{4}$; d) $-\frac{39}{70}$; e) 0,2; f) 6; g) $-1{,}5$; h) 6; i) $\frac{1}{5}$; j) $1\frac{1}{3}$; k) $-1\frac{3}{7}$; l) -27; m) $\frac{2}{7}$; n) -5; o) 1; p) 5; r) $\frac{1}{3}$; s) 1; t) $\frac{1}{2}$; u) 0.

3. a) $-\frac{1}{12}$; b) $\frac{7}{12}$; c) $-\frac{1}{12}$; d) $-\frac{3}{4}$; e) $\frac{49}{144}$; f) $-\frac{7}{144}$; g) $-\frac{1}{36}$.

4. a) $x+2$; b) $3x-4$; c) $-2x^2+7x-3$; d) $-4x^2+14x-6$; e) $3x^2+2x-8$; f) $9x^2-24x+16$.

5. a) 2400; b) 570; c) 60; d) 240; e) 18; f) 800; g) $\frac{1}{4}$; h) $3\frac{3}{4}$.

6. a) $4x$; b) $3x^2$; c) $-2x^2+x$; d) $x-1$; e) $3x-5$; f) $4a^2b^5-4a^2b^4$; g) $5a^2b^2+3a^2b$; h) $2x^2y^2$; i) b^4; j) $6ab+4b^2$; k) 5; l) $-y^2$; m) $-11b^2$; n) $-2y^2-2y$; o) $2t^2-13t$; p) $18\sqrt{15}$; r) $\sqrt{2}$; s) -1; t) $\sqrt{b}$; u) $2\cos^2\alpha$; v) 2; z) 1.

7. *Nurodymas.* Iš pradžių reiškinį suprastinkite, o po to apskaičiuokite jo reikšmę. a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{1}{7}$; c) $-20\frac{1}{2}$; d) $-\frac{7}{27}$.

9. a) $\frac{12}{13} < \frac{13}{14}$; b) $-\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{2}\sqrt{40} > \frac{1}{3}\sqrt{63}$; d) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 < \left(-\frac{1}{2}\right)^2$.

10. **D**.

11. a) 10; b) 99; c) 117; d) 990.
Pastaba. Priminkite moksleiviams, jog kalbant apie lyginius (nelyginius) skaičius galvoje turimas natūralusis skaičius.

12. a) $2n-1$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 2$; b) $n(n+1)$, $n \in \boldsymbol{N}$; c) $n(n^2-1)$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 2$; d) $3n$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 2$.

13. *Nurodymas.* Pasinaudokite lygybėmis: a) $10^{25}-7 = 1\underbrace{00\ldots0}_{25}-7 = \underbrace{99\ldots9}_{24}3$;
b) $10^{16}+8 = 1\underbrace{00\ldots0}_{16}+8 = 1\underbrace{00\ldots0}_{15}8$.

14. *Nurodymas.* Natūraliuosius skaičius užrašykite skyrių suma, o po to reiškinį suprastinkite: a) $100a+10b+c-(100c+10b+a) = 99a-99c$; b) $10x+y+10y+z+10z+x = 11x+11y+11z$.

15. a) $7 \cdot 10^5$; b) $1{,}45 \cdot 10^{-4}$.

16. $2{,}5 \cdot 0{,}0001 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$.
Atsakymas. **B**.

17. $1\frac{3}{7} = 1{,}4285714... \approx 1{,}43$; a) $\frac{1}{700}$; b) $\frac{1}{1001}$, t. y. $\approx 0{,}10\%$.

18. a) $3(2-x)$; b) $x(x-2)$; c) $(a-3)(a+1)$; d) $(x+1)^2(x-1)$; e) $(y-3)^2$; f) $(m+5n)^2$; g) $(x-2y)(x+2y)$; h) $(x-2)(x+2)(x^2+4)$; i) $(4y-7)(2x-3)$; j) $x(3y-4z)(3y+4z)$; k) $(a-5)(a-9b)$; l) $3(a-b)^2$.

19. a) 20; 2000; b) 3; 30 000; c) 90; 5400; d) 5; 5; e) 500; f) 64,8; g) 0,25; h) 60.

20. a) 48 m; b) 58,5 m.

21. a) $\left(\frac{y}{2}+4\right)$ metų; b) Dariui yra $2z$, o Aldonai $(z+4)$ metų.

22. a) $8x+12$; b) $3x^2+16x$; c) $\sqrt{10x^2+12x+36}$; d) $\sqrt{x^2+12x+40}$.

23. a) 5, $O(1{,}5; -4)$; b) 10, $O(-1; 1)$.

24. a) 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30; b) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.

25. a) 24; b) 720.

26. a) 40. *Nurodymas*. Raskite skaičių 80, 120 ir 200 DBD; b) 2 mandarinai, 3 kriaušės ir 5 saldainiai.

27. C. *Nurodymas*. Raskite skaičių 2, 3 ir 4 MBK.

28. a) 22,4 Lt; b) 4,5 m; c) $6{,}4x$ Lt; d) $\frac{5y}{32}$ m.

29. a) 24 d., $\frac{360}{x}$ d.; b) 20 vištų, $\frac{360}{y}$ vištų.

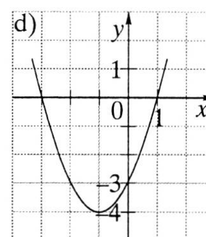
30.

a	5	12	30	36	$47\frac{1}{2}$
b	1	2,4	6	7,2	$9\frac{1}{2}$

31.

m	5	75	30	36	$18\frac{18}{19}$
n	36	2,4	6	5	$9\frac{1}{2}$

32. a) x^2+2x-3; b) $(x+3)(x-1)$; c) -3; 1; e) -4; f) $M(x)=-3$, kai $x=-2$ ir $x=0$; $M(x)=5$, kai $x=-4$ ir $x=2$; g) reiškinio $M(x)$ reikšmės yra teigiamos, kai $x<-3$, $x>1$; neigiamos, kai $-3<x<1$.



33. $\frac{3a-6}{a^2-2a}=\frac{3}{a}$; $\frac{a^2-1}{2a+1}=\frac{a-1}{2}$; a) $\frac{a^2-a+6}{2a}$; b) $\frac{6+a-a^2}{2a}$; c) $\frac{3a-3}{2a}$; d) $\frac{6}{a^2-a}$.

34. a) $\frac{x^3}{x^2-1}$; b) $\frac{x^3}{x^2+1}$.

35. a) 3 km/h; b) 17 km/h. *Nurodymas*. Valties greitis prieš srovę yra $20-20\cdot\frac{30}{100}=14$ (km/h).

36. a) $\frac{a+b}{2}$ km/h; b) $\frac{a-b}{2}$ km/h.

37. a) $(x+3)$ km/h; b) $(x-3)$ km/h; c) $(2x+6)$ km; d) $(3x-9)$ km; e) $(4x-3)$ km; f) $\frac{50}{x-3}$ h, $\frac{30}{x+3}$ h; g) $\frac{30x+30}{x^2-9}$ h.

38. a) 40 km; b) 10 km; c) 15,6 km; d) 156%.

39. Dviratininkai susitiks, jeigu važiuos vienas priešais kitą. Taip bus po 25 min. Vienas bus nuvažiavęs 6,25 km, o kitas — 3,75 km.
Vienas dviratininkas pavys kitą, jeigu abu važiuos viena kryptimi ir greitesnysis važiuos paskui lėtesnįjį. Taip bus po 1 h 40 min. Vienas bus nuvažiavęs 25 km, o kitas — 15 km.

40. $\frac{2ab}{a+b}$ km/h. *Nurodymas*. Visą kelią automobilis važiavo $\left(\frac{s}{2}:a+\frac{s}{2}:b\right)$ h, t. y. $\frac{s(a+b)}{2ab}$ h.

41. Per $26\frac{2}{3}$ min, t. y. 26 min 40 s.

42. a) Per 6 h; b) per 5 h; c) per 3,5 h.

43. a) $\frac{1}{2x}$; b) $\frac{1}{3x}$; c) $\frac{5}{6x}$; d) per $1{,}2x$ h; e) 0,6; f) 0,4.

44. a) 20%; b) 25%.

45. 860 Lt, 900 Lt, 5100 Lt; 861,51 Lt, 905,13 Lt, 5110,19 Lt.

46. Tirpale yra $40\cdot\frac{20}{100}=8$ (g) druskos ir $40-8=32$ (g) vandens.
a) Į tirpalą įbėrus 10 g druskos, turėsime $40+10=50$ (g) tirpalo, kuriame yra $8+10=18$ (g) druskos. Tada druskos tirpalo koncentracija būtų $\frac{18\cdot100}{50}=$ $=36$ (%), o tai yra $36\cdot10=360$ (‰).
b) Į tirpalą įpylus 10 g vandens, turėsime $40+10=50$ (g) tirpalo, kuriame yra 8 g druskos. Tada druskos tirpalo koncentracija būtų $\frac{8\cdot100}{50}=16$ (%), o tai yra $16\cdot10=160$ (‰).

47. $\frac{3{,}75\cdot1000}{5}=750$.

48. **D**.

49. a) $0{,}7h$ metrų; b) $0{,}7^2h=0{,}49h$ metrų; c) $0{,}7^3h=0{,}343h$ metrų; d) $0{,}7^4h=0{,}2401h$ metrų; e) $0{,}7^nh$ metrų.

50. a) 42; b) 9; c) 11; d) $5n+2$, $n\in\mathbf{N}$; e) 77, 127, 252.

2. Lygtys ir nelygybės

Lygčių kartojimui skirti 51–80, o nelygybių — 81–95 uždaviniai. Pirmiausia pakartojama lygties sprendinio sąvoka (51), o po to seka lygčių sprendimas: tiesinių (52 — su vienu nežinomuoju; 53 — su dviem nežinomaisiais); kvadratinių (54, 55); racionaliųjų (56). Tada pateikiama nemažai tekstinių uždavinių, kurie sprendžiami sudarant lygtį: tiesinę su vienu nežinomuoju (57a,b, 58–67); kvadratinę (57c, 68–75); racionaliąją (57d, 76–80). Nelygybių kartojimas pradedamas prisimenant nelygybių savybes (81), sprendinio sąvoką (82) bei nelygybės sprendinių vaizdavimą skaičių tiesėje ir užrašymą intervalu (83). Prieš pradėdami spręsti tiesines (84, 87, 88) ir kvadratines (89) nelygybes pakartokite skaičių intervalus (85, 86). Nelygybių kartojimas baigiamas tekstiniais uždaviniais, kurie sprendžiami sudarant nelygybę (90–95).

51. a), c), d), f) — taip; b), e) — ne.

52. a) 3; b) $\frac{3}{5}$; c) 15; d) -70; e) 7; f) $2\frac{4}{7}$; g) -14; h) 2,5; i) $1\frac{1}{11}$; j) -5; k) $11\frac{2}{3}$; l) $\varnothing$; m) sprendinys yra bet kuris skaičius; n) $\varnothing$; o) sprendinys yra bet kuris skaičius; p) -4.

53. a) $y = 4 - 3x$; b) $y = 5x + 6$; c) $y = -3{,}5 - 4x$; d) $y = 4x - 2\frac{2}{3}$.

54. a) -6; $\frac{3}{4}$; b) $-1\frac{2}{5}$; $\frac{2}{3}$; c) $-2{,}5$; 2,5; d) 0; $\frac{1}{27}$; e) 2; 8; f) $-\frac{1}{2}$; 2.

55. a) 0; 8; b) 0; $\frac{2}{7}$; c) -5; 5; d) $\varnothing$; e) $-3{,}5$; 3,5; f) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; g) 0; h) 0; 4; i) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; j) -4; 2; k) -1; 1,5; l) 2,5; m) -12; n) $\varnothing$; o) $4-\sqrt{14}$; $4+\sqrt{14}$; p) $1-\frac{\sqrt{5}}{5}$; $1+\frac{\sqrt{5}}{5}$; r) -5; 0; s) $-4\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$.

56. a) 5; b) 0; 3; c) -9; 9; d) -4; 4; e) $1\frac{1}{3}$; f) $\frac{2}{5}$; g) $-1\frac{2}{3}$; h) $4\frac{2}{3}$; i) $\frac{5-\sqrt{17}}{2}$; $\frac{5+\sqrt{17}}{2}$; j) 3; k) -5; 5; l) -4; m) $\varnothing$; n) -2; o) 5.

57. a) $7\frac{1}{3}$; $-\frac{2}{3}$; b) -2; 16; c) -1 ir $1\frac{1}{2}$; 0 ir $\frac{1}{2}$; d) -1; 0.

58. a) 51 cm, 17 cm; b) 30,5 cm, 37,5 cm.

59. 85 m, 55 m.

60. 12 cm, 24 cm, 24 cm.

61. Vieną skaičių patogu žymėti $5x$, tada kitas skaičius bus $3x$. Sprendžiame lygtį: a) $5x + 3x = 88$; b) $5x - 3x = 4$.
Atsakymas. a) 55 ir 33; b) 10 ir 6.

62. a) 60°, 120°; b) 54°, 126°.

63. a) Sakykime, kad pigesnė knyga kainavo x Lt. Tada brangesnė kainavo $1{,}2x$ Lt. Pagal sąlygą: $x + 1{,}2x = 44$, $x = 20$; $1{,}2 \cdot 20 = 24$.
b) Sakykime, kad brangesnė knyga kainavo x Lt. Tada pigesnė kainavo $0{,}6x$ Lt. Pagal sąlygą: $x + 0{,}6x = 44$, $x = 27{,}5$; $0{,}6 \cdot 27{,}5 = 16{,}5$.
Atsakymas. a) 20 Lt, 24 Lt; b) 27,5 Lt, 16,5 Lt.

64. a) 170 Lt, 221 Lt; b) 230 Lt, 161 Lt.

65. a) Sakykime, kad pirmasis berniukas pardavė x laikraščių. Tada antrasis pardavė $(x + 12)$, o trečiasis $\frac{5}{7}(x + x + 12)$ laikraščių. Sprendžiame lygtį: $x + x + 12 + \frac{5}{7}(x + x + 12) = 144$, $x = 36$.
Atsakymas. Pirmasis berniukas pardavė 36, antrasis 48, o trečiasis 60 laikraščių.
b) 300 kg, 330 kg, 350 kg.

66. a) Sakykime, kad iš stoties į stovyklą turistai ėjo t valandų. Tada grįžo per $(t + 1)$ valandų. Pagal sąlygą: $5t = 4(t + 1)$, $t = 4$;
b) 20 km.

67. a) Sakykime, kad valties greitis stovinčiame vandenyje yra x km/h. Pagal sąlygą: $8(x + 2) = 10(x - 2)$, $x = 18$;
b) 1 km/h.

68. a) -3 ir 4; b) -18 ir -8; 8 ir 18; c) -3 ir -2; 2 ir 3.

69. a) 56 m; b) 64 m.

70. 10 cm × 10 cm. *Nurodymas.* Sprendžiame lygtį: $x(x - 3) = 70$.

71. 6 cm, 8 cm, 24 cm^2.

72. 6 cm, 10 cm.

73. a) 20; b) 12.
Nurodymas. Sprendžiame lygtį: a) $x(x - 1) = 380$; b) $x(x - 1) = 132$.

74. 100 km/h, 75 km/h.
Nurodymas. Sprendžiame lygtį: $(2x)^2 + (2 \cdot 0{,}75x)^2 = 250^2$.

75. Po 12 s. *Nurodymas.* Sprendžiame lygtį: $-5t^2 + 130t - 840 = 0$, $t = 12$ ir $t = 14$. Raketa pasieks 840 m aukštį po 12 s ir po 14 s. Kadangi pasiekusi šį aukštį raketa sprogsta, tai aišku, kad ji sprogs po 12 s.

76. a) 2,5 h; b) 40 km/h.
Nurodymas. Sprendžiame lygtį: a) $\frac{30}{x-2} - \frac{30}{x} = \frac{1}{2}$; b) $\frac{120}{x} - \frac{120}{x+5} = \frac{1}{3}$.

77. a) 7 km/h; b) 28 km/h.
Nurodymas. Sprendžiame lygtį: a) $\frac{21}{14+x} + \frac{21}{14-x} = 4$; b) $\frac{30}{x+2} + \frac{13}{x-2} = 1{,}5$.

78. a) Per 12 h; b) per 20 h, per 30 h; c) per 15 h, per 30 h.
Nurodymas. Sprendžiame lygtį: a) $\frac{1}{6} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} = \frac{1}{12}$;
c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{10}$.

79. a) *Pastaba.* Tai sunkus uždavinys. Jį galite pasiūlyti išspręsti tik labai gabiems mokiniams. (Apie šį uždavinį rašoma žurnale „Alfa plius omega“, 2002, Nr. 1 ir Nr. 2.)
Sprendimas. Sakykime, kad iš pradžių dirbo x siuvėjų ir kad siuvykla planavo užbaigti darbą per t dienų. Vienas siuvėjas per dieną pasiuva y kostiumų. Vadinasi, x siuvėjų per t dienų pasiūs xyt kostiumų. Gauname lygčių sistemą: $\begin{cases} xyt = 160, \\ (x+2)y(t-4) = 160, \end{cases}$ kurioje yra dvi lygtys ir trys nežinomieji. Tokių lygčių sistemų mokykloje nenagrinėjame. Šią sistemą galima būtų spręsti sulyginant kairiąsias lygčių puses (nes dešiniosios pusės lygios): $xt = (x+2)(t-4)$, $xt = xt - 4x + 2t - 8$, $2t = 4x + 8$, $t = 2x + 4$. Kadangi $x \in \boldsymbol{N}$, tai akivaizdu, kad $t \in \boldsymbol{N}$. Jei priimsime salygą, kad $y \in \boldsymbol{N}$, tai perrinkimo būdu gautume, kad $x = 2$, $y = 10$, $t = 8$ arba $x = 8$, $y = 1$, $t = 20$. Tačiau juk galima per dieną pasiūti ir 1,5 ar $5\frac{1}{3}$ kostiumo. Tokiu būdu gautume be galo daug sprendinių.
b) Sakykime, kad iš pradžių ūkininkas turėjo x arklių. Tada vienam arkliui per dieną tekdavo $\frac{96}{x}$ kg šieno. Pagal sąlygą sudarome lygtį: $\frac{96}{x-2} - \frac{96}{x} = 4$, $x = -6$ (netinka), $x = 8$.
Atsakymas. Ūkininkas iš pradžių turėjo 8 arklius.

80. a) $\frac{12}{8}$; b) $\frac{9}{6}$.

81. a) $-4\frac{2}{3} < 9\frac{1}{3}$; $-10 < 4$; $-8{,}7 < 5{,}3$;
b) $5 > -3$; $-3\frac{1}{7} > -11\frac{1}{7}$; $-0{,}4 > -8{,}4$;
c) $8{,}6 > -12$; $-12{,}9 < 18$; $-2{,}15 < 3$;
d) $-0{,}8 < 4$; $1{,}2 > -6$; $-9{,}6 < 48$; $7{,}2 > -36$.

82. a) -4; $1{,}5$; $2\frac{1}{6}$; -100; b) $2\frac{1}{6}$; 7.

83. a) $(-5; 7)$; b) $[-12; 0]$; c) $[4; 6)$; d) $(-3; 9]$; e) $(2; +\infty)$; f) $(-\infty; -4)$; g) $(-\infty; -5]$; h) $(-\infty; 0)$; i) $[0; +\infty)$.

84. a) $[7; +\infty)$; b) $(-\infty; -4)$; c) $[-3; +\infty)$; d) $[6; +\infty)$; e) $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; f) $(-\infty; 1)$; g) $\left(-\infty; -\frac{7}{8}\right]$; h) $\left(-\infty; -\frac{4}{5}\right)$; i) $(-\infty; -1)$; j) $\left(-\infty; 3\frac{1}{7}\right]$; k) $[1; +\infty)$; l) $(-\infty; 7{,}2)$; m) $\left(1\frac{1}{3}; +\infty\right)$; n) $\left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$; o) $(-\infty; 24)$; p) sprendinių nėra.

Nėra pateikta nei vienos nelygybės, kai sprendinys yra kiekvienas skaičius, ir tik viena nelygybė, kai sprendinių nėra. Mokytojas galėtų pats pateikti keletą tokio tipo pavyzdžių.

85. a) 3; b) 11; c) -5; d) -4.

86. a) 7; b) -4; c) -8; d) 6.

87. a) 80; b) -100; c) 48; d) 48.

88. a) 30; b) -5; c) -17; d) 1.

89. a) $(-3; 0)$; b) $(-\infty; 0]$, $[5; +\infty)$; c) $(-5; 0)$; d) $[-4; 4]$; e) $(-\infty; -2)$, $(2; +\infty)$; f) $[-3; 3]$; g) $[2; 3]$; h) $(-\infty; 2)$, $(5; +\infty)$; i) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$, $(1; +\infty)$; j) $(-\infty; +\infty)$; k) $\varnothing$; l) 5; m) $(-\infty; +\infty)$; n) $\varnothing$; o) $(-\infty; +\infty)$; p) $(-\infty; +\infty)$; r) $\varnothing$; s) $(-\infty; +\infty)$.

90. a) $x < 14$; b) $x < -14\frac{4}{7}$; c) $x > -3\frac{3}{4}$; d) $x < 1\frac{9}{26}$; e) $x > 0$; f) $x < -\frac{3}{8}$; g) $x \leqslant 2$, $x \geqslant 4$; h) $x \leqslant 2{,}5$, $x \geqslant 10$.

91. a) $(-\infty; -25)$; b) $(300; +\infty)$.
Nurodymas. Sprendžiame nelygybę: a) $\frac{3}{5}x < -15$; b) $0{,}08x > 24$.

92. Mažiau už 4 cm.

93. Mažiau už 4,05 cm.

94. Sakykime, kad turistai gali nuplaukti x km. Kadangi valties greitis pasroviui yra $20 + 2 = 22$ (km/h), o prieš srovę $20 - 2 = 18$ (km/h), tai sprendžiame nelygybę: $\frac{x}{18} + \frac{x}{22} \leqslant 8$, $x \leqslant 79{,}2$. Taigi turistai gali nuplaukti ne toliau kaip 79,2 km.

95. Pirmųjų keturių testų balų suma yra $85 + 89 + 90 + 81 = 345$. Sprendžiame nelygybę: a) $\frac{345+x}{5} \geqslant 85$; b) $\frac{345+x}{5} \geqslant 87$.
Atsakymas. a) 80; b) 90.

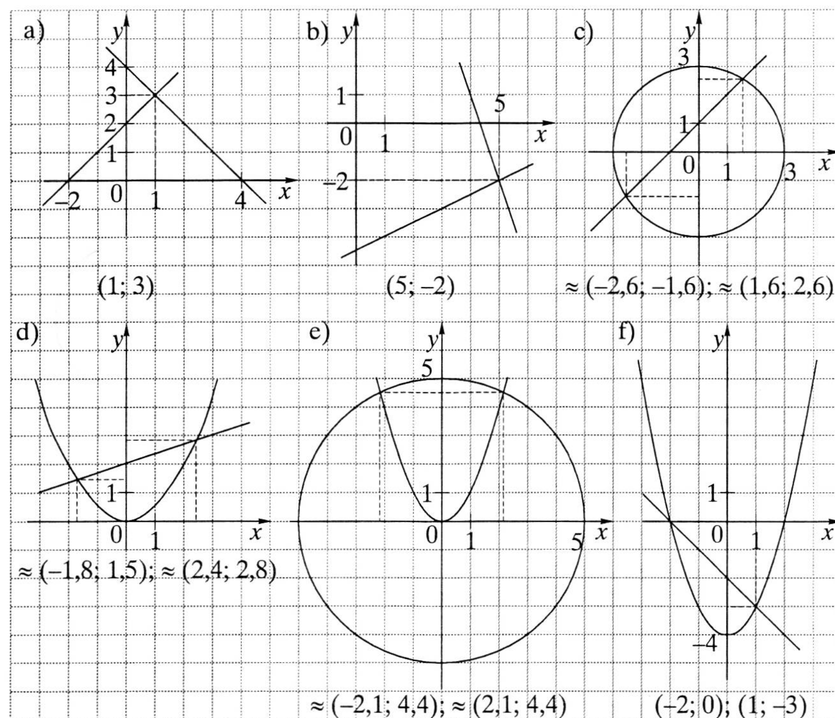
3. Lygčių ir nelygybių sistemos

Lygčių sistemų kartojimui skirti 96–111, o nelygybių sistemų — 112–120 uždaviniai. Pirmiausia pakartojama lygčių sistemos sprendinio sąvoka (96), o po to seka lygčių sistemos sprendimas: grafinis (97) ir algebrinis (98, 99). Tada pateikiama keliolika tekstinių uždavinių, kuriuos sprendžiant galima sudaryti lygčių sistemą (99a, 100a, 101–104 — tiesinę; 99b,c, 100b–e, 105–111 — kai viena lygtis yra tiesinė, o kita — netiesinė). Nelygybių sistemų kartojimas pradedamas prisimenant sprendinio sąvoką (112) bei nelygybių sistemos sprendinių vaizdavimą skaičių tiesėje ir užrašymą intervalu (113). Po to seka tiesinių nelygybių su vienu kintamuoju (114, 115) ir dvigubųjų nelygybių (116, 117) sprendimas. Nelygybių sistemų kartojimas baigiamas tekstiniais uždaviniais, kurie sprendžiami sudarant tiesinių nelygybių sistemą (118–120).

96. a), d), f) — taip; b), c), e) — ne.

Pastaba. Dar kartą akcentuokite, kad reikia patikrinti, ar duotoji skaičių pora *abi* lygtis paverčia teisingomis skaitinėmis lygybėmis.

97.



98. *Nurodymas.* Pastebėkime, kad d)–f) punktų lygčių sistemas patogu spręsti sudėties būdu, o visas kitas — keitimo būdu.

Atsakymas. a) (3; 2); b) (3; 10); c) (4; −1); d) (2; −3); e) $\left(-2; -\frac{1}{3}\right)$; f) (0,6; 1,6); g) (−4; −12), (4; 12); h) (5; −1), $\left(9\frac{8}{11}; \frac{2}{11}\right)$; i) $\left(-\frac{1}{5}; -1\frac{2}{5}\right)$, (1; 1); j) (−1,2; −2), (2; 1,2); k) (−6; −9), (3; 4,5); l) (−6; −4), (6; 4); m) (1; 4), (10; −5); n) (2; −5), (15; 8); o) (−3; −3), (1,5; −12).

99. Funkcijų grafikų susikirtimo taškų koordinatės yra sprendiniai lygčių sistemos:

a) $\begin{cases} y = 2x + 4, \\ x - y = 1, \end{cases}$ (−5; −6); b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ y = 3x + 1, \end{cases}$ (−1,6; −3,8), (1; 4);

c) $\begin{cases} y = 2x^2 - 6x + 1, \\ y = 2x - 5, \end{cases}$ (1; −3), (3; 1).

100. Sakykime, kad tie skaičiai yra x ir y. Sprendžiame lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} x + y = 35, \\ x - y = 7; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 34, \\ xy = 288; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = -16, \\ xy = 192; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 10, \\ x^2 + y^2 = 698; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 100, \\ 3x - 2y = 30. \end{cases}$

Atsakymas. a) 21 ir 14; b) 16 ir 18; c) −24 ir −8; 8 ir 24; d) 23 ir −13; e) 10 ir 0; 26 ir 24.

101. a) 3 km/h, 12 km/h; b) 7,5 km/h, 52,5 km/h; c) 30 km/h, 510 km/h.

102. a) 70 ct, 1 Lt 20 ct; b) 2 Lt 30 ct, 2 Lt 10 ct.

103. a) Sakykime, kad reikės paimti x gramų 25% ir y gramų 50% tirpalo. Sprendžiame lygčių sistemą: $\begin{cases} x+y=500, \\ 0{,}25x+0{,}5y=0{,}3\cdot 500, \end{cases}$ $x=400$, $y=100$.

b) Sakykime, kad gamintojai sunaudojo x gramų 30% ir y gramų 70% vario lydinio. Sprendžiame lygčių sistemą: $\begin{cases} x+y=800, \\ 0{,}3x+0{,}7y=0{,}45\cdot 800, \end{cases}$ $x=500$, $y=300$.

104. a) Sakykime, kad už 10% metinių palūkanų buvo investuota x Lt, o už 12% — y Lt. Sprendžiame lygčių sistemą: $\begin{cases} x+y=10\,000, \\ 0{,}1x+0{,}12y=1020, \end{cases}$ $x=9000$, $y=1000$.

b) Sakykime, kad į banką, kuris moka 3% metinių palūkanų, buvo padėta x Lt, o į banką, kuris moka 5% — y Lt. Sprendžiame lygčių sistemą: $\begin{cases} x+y=12\,000, \\ 0{,}03x+0{,}05y=550, \end{cases}$ $x=2500$, $y=9500$.

105. 140 m.

106. 12 m, 35 m.

107. 24 cm, 7 cm.

108. 24 m, 10 m, 240 m^2.

109. a) Per 6 d., per 12 d.; b) per 60 h, per 84 h.

110. a) 25 km/h, 20 km/h; b) 60 km/h, 75 km/h.

111. a) 12 mūrininkų, po 36 m^3; b) 9 darbininkai, po 80 detalių.

112. a) -2, 0, 1; b) -2, 0; c) -4, -2, 0, 1, 2.

113. a) $(-2; 5)$; b) $[-3; 4)$; c) $[-1; 3]$; d) $(-7; -4]$; e) 6; f) sprendinių nėra.

114. a) $[-4; 5]$; b) $\left[2\frac{1}{3}; +\infty\right)$; c) $(-\infty; -2)$; d) $(-\infty; -12]$; e) sprendinių nėra; f) $\left(-\frac{2}{3}; 1\right]$; g) $(1; +\infty)$; h) 6; i) $\left(2; 3\frac{4}{7}\right)$; j) $(-\infty; -3)$; k) $(2{,}5; +\infty)$; l) $[0{,}75; 2{,}5)$; m) sprendinių nėra; n) $[14; +\infty)$; o) $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right]$.

115. a) -5, -4, -3, -2, -1, 0; b) -2, -1; c) 1, 2, 3, 4.

116. a) $(14; 20]$; b) $\left(\frac{1}{4}; 1\frac{1}{4}\right)$; c) $[0{,}3; 0{,}9]$; d) sprendinių nėra.

Pastaba. Prisiminkite, kad dvigubąją nelygybę galima spręsti sudarant lygčių sistemą arba tiesiog taikant nelygybių savybes, pvz.:

a) $10 < x-4 \leqslant 16$; $\begin{cases} x-4>10, \\ x-4\leqslant 16, \end{cases}$ $\begin{cases} x>14, \\ x\leqslant 20; \end{cases}$

arba: $10 < x-4 \leqslant 16$, $10+4 < x-4+4 \leqslant 16+4$, $14 < x \leqslant 20$.

117. a) $-0{,}8 < x < 2{,}4$; b) $3 \leqslant x < 8$.

Nurodymas. Sprendžiame nelygybę: a) $-8 < 4-5x < 8$; b) $3 \leqslant \frac{4x+3}{5} < 7$.

118. a) Sakykime, kad turistai per dieną galėjo nueiti x km. Pagal sąlygą: $\begin{cases} (x+5)\cdot 5 > 90, \\ (x-5)\cdot 6 < 60, \end{cases}$ $\begin{cases} x>13, \\ x<15. \end{cases}$

Taigi turistai galėjo nueiti daugiau negu 13 km, bet mažiau negu 15 km.

b) Daugiau negu 14 km, bet mažiau negu 21 km.

119. Sakykime, kad kitos kraštinės ilgis gali būti x cm. Pagal sąlygą: $80 < 2(x+20) < 100$, $20 < x < 30$. Taigi kitos kraštinės ilgis gali būti didesnis negu 20 cm, bet mažesnis negu 30 cm.

120. Sakykime, kad 1 kg saldainių „Kriaušė“ gali kainuoti x Lt. Pagal sąlygą: $14 < \frac{12\cdot 16+10x}{12+10} < 18$, $11{,}6 < x < 20{,}4$. Taigi 1 kg saldainių „Kriaušė“ gali kainuoti daugiau negu 11,6 Lt, bet mažiau negu 20,4 Lt.

4. Funkcijos

Pratimuose daug dėmesio skiriama grafikų skaitymui ir braižymui, taikymui sprendžiant lygtis, nelygybes, nustatant lygties sprendinių skaičių (145, 146, 147). Iš grafiko reikia nurodyti funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis (121, 124), funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalus (121, 123), intervalus, kuriuose funkcija įgyja teigiamas, neigiamas reikšmes (121), atpažinti lyginę, nelyginę, nei lyginę, nei nelyginę funkcijas (125), atsakyti į klausimą, kuri kreivė yra funkcijos grafikas, kuri ne (122). Pakartojus lyginės ir nelyginės funkcijų grafikų savybes, reikia užbaigti braižyti funkcijos grafiką (126). Sprendžiant 135-tą pratimą, reikėtų pakartoti, kaip braižomi anksčiau nagrinėtų funkcijų grafikai.
Braižant funkcijų $f(x) = ax^3$, $f(x) = a\sqrt{x}$, $f(x) = a\sqrt[3]{x}$, $f(x) = \frac{k}{x}$ grafikus, tenka sudaryti funkcijų reikšmių lenteles. Siūloma pakartoti funkcijos $y = |f(x)|$ grafiko braižymą, kai duotas funkcijos $y = f(x)$ grafikas (136) ir tuomet, kai funkcija išreikšta formule (137). Turint funkcijos grafiką ir kai kurių, jam priklausančių taškų koordinates, galima sudaryti funkciją išreiškiančią formulę (134).
Apibrėžimo srities radimui skirtas 133 pratimas, funkcijos reikšmės radimui, kai žinoma argumento reikšmė — 128, argumento reikšmės atitinkančios duotą funkcijos reikšmę radimui — 129. Kai kurias grafikų savybes galima nustatyti skaičiuojant: rasti taškų, kuriuose grafikas kerta koordinačių ašis, koordinates (130), patikrinti ar duotieji taškai priklauso grafikui (131), rasti funkcijų grafikų bendrų taškų koordinates (144). Žinant taško, priklausančio funkcijos grafikui, koordinates galima rasti funkciją išreiškiančios formulės nežinomą koeficientą (132). 138–142 uždaviniuose funkcija „įdarbinama" — reikia sudaryti priklausomybę išreiškiančią formulę, rasti funkcijos reikšmę arba argumento reikšmes atitinkančias tam tikrus reikalavimus.

121. a) $D(f) = [-10; 9]$, $E(f) = [-4; 5]$; b) $f(x) = 0$, kai $x = -8$, $x = -1$, $x = 7$; c) $f(x) > 0$, kai $-8 < x < -1$ ir $7 < x \leqslant 9$; $f(x) < 0$, kai $-10 \leqslant x < -8$ ir $-1 < x < 7$; d) funkcija didėja intervaluose $(-10; -5)$ ir $(4; 9)$; funkcija mažėja intervale $(-5; 4)$; e) didžiausia funkcijos reikšmė lygi 5; mažiausia funkcijos reikšmė lygi -4; f) $f(x) = -3$, kai $x = -10$, $x = 2$, $x = 5$; g) kai $x = 1$, tai $f(x) = f(1) = -2$.

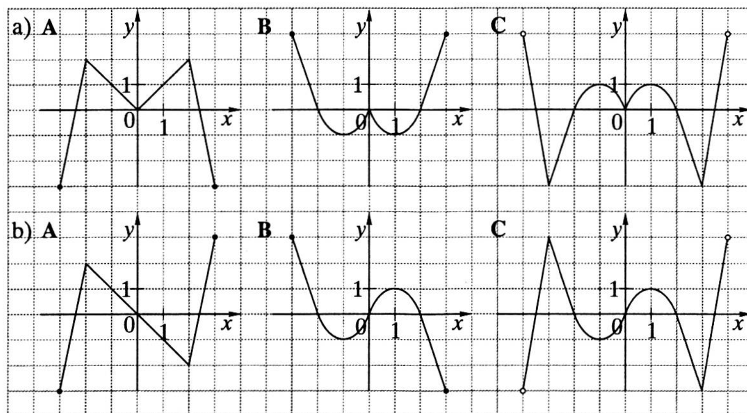
122. a) Taip; b) ne; c) taip; d) ne.

123. Didėjimo intervalai: a) $(0; 2)$; b) $(-3; -1)$, $(1; 3)$; c) $(0; 1)$; d) $(4; 6)$; mažėjimo intervalai: a) $(-2; 0)$; b) $(-1; 1)$; c) $(-3; 0)$, $(1; 3)$; d) $(0; 2)$.
Pastaba. Galite su stipresniais moksleiviais prisiminti ir pastovios funkcijos apibrėžimą. Punkte d) pavaizduota funkcija intervale $(2; 4)$ yra pastovi.

124. a) $D(f) = [-3; 3]$, $E(f) = [-3; 3]$; b) $D(f) = [-4; 4]$, $E(f) = [-3; 3]$; c) $D(f) = (-4; 3]$, $E(f) = [-2; 3]$.

125. **B** — lyginės; **C** — nelyginės; **A, D** — nėra nei lyginės, nei nelyginės funkcijos grafikas.
Pastaba. Dar kartą pakartokite, kad lyginės funkcijos grafikas yra simetriškas y ašies atžvilgiu, o nelyginės — koordinačių pradžios taško atžvilgiu.

126.



127. c), f) — funkcija yra lyginė, nes su kiekviena x reikšme $f(-x) = f(x)$;
b), e), g) — funkcija yra nelyginė, nes su kiekviena x reikšme $f(-x) = -f(x)$;
a), d), h), i) — funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.

128. 1) a) 4; b) $-0{,}625$; c) $0{,}25$; d) -2; e) 6; f) 0; g) $1{,}5$; h) $0{,}875$; i) $6{,}25$;
2) a) 1; b) 5; c) -2; d) 4; e) -3; f) 3; g) 0; h) $-0{,}25$; i) 16.

129. 1) a) -1; b) 13; c) $-3\sqrt{2}$ ir $3\sqrt{2}$; d) -1 ir 1; e) 3; f) -5 ir 1;

g) -2 ir 6; h) -3; i) 81;
2) a) 0; b) 4; c) 0; d) $-\sqrt{10}$ ir $\sqrt{10}$; e) 0 ir 6; f) -2; g) tokios x reikšmės nėra; h) 0; i) 0.

130. a) (3; 0), (0; 1); b) (−5; 0), (5; 0), (0; −25); c) (−3; 0), (−2; 0), (0; 6); d) (−2,5; 0), $\left(0; 1\frac{2}{3}\right)$; e) (0; 0), (3; 0); f) x ašies nekerta, o y ašį kerta taške, kurio koordinatės yra (0; 10); g) (−0,5; 0), (0; 1); h) (−2; 0), (0; 2); i) x ašies nekerta, o y ašį kerta taške, kurio koordinatės yra (0; −11).
Nurodymas. Norint rasti abscises taškų, kuriuose grafikas kerta x ašį, reikia išspręsti lygtį $f(x) = 0$; norint rasti ordinatę taško, kuriame grafikas kerta y ašį, reikia apskaičiuoti funkcijos reikšmę taške $x = 0$, t. y. $f(0)$.

131. a) B ir D; b) C ir F; c) A; d) D; e) A ir E; f) B; g) nei vienas; h) C; i) A.

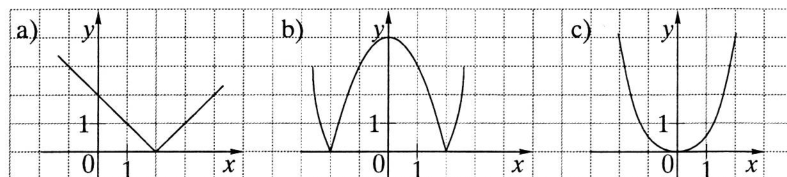
132. a) 1; b) $\frac{1}{12}$; c) −1; d) $\frac{1}{2}$; e) −1; f) −3; g) −16; h) 8.

133. a) $(-\infty; +\infty)$; b) $(-\infty; +\infty)$; c) $(-\infty; 1{,}5)$, $(1{,}5; +\infty)$; d) $(-\infty; +\infty)$; e) $(-\infty; -1{,}5]$; f) $(-\infty; -2)$, $(-2; 2)$, $(2; +\infty)$; g) $(-\infty; +\infty)$; h) $(-\infty; -2]$, $[2; +\infty)$; i) $(-\infty; +\infty)$.

134. a) $g(x) = \frac{1}{2}x^2$; b) $u(x) = \frac{3}{x}$; c) $f(x) = x + 3$; d) $g(x) = -x^2 - 4x - 4$; e) $f(x) = -\frac{1}{4}x$; f) $g(x) = x^2 - 4x + 2$; g) $f(x) = -\frac{4}{3}x - 4$; h) $g(x) = -x^2 + 3$; i) $g(x) = 2x^2 + 4x$; j) $h(x) = -x^3$; k) $u(x) = -\frac{4}{x}$; l) $v(x) = 2\sqrt{x}$.
Nurodymas. Dirbdami su silpnesne klase pirmiausia pasiaiškinkite, kokios funkcijos grafikas kiekvienu atveju yra nubraižytas.

135. *Nurodymas.* Iš pradžių reikėtų atpažinti funkcijas ir pakartoti pagrindines jų grafikų braižymo taisykles.
a), b), c) — tiesinė funkcija, jos grafikas yra tiesė. Kartais mokiniai tiesei nubrėžti sudarinėja funkcijos reikšmių lentelę. Pakartokite, kad tiesei nubrėžti pakanka rasti dviejų jai priklausančių taškų koordinates. Be to, prisiminus, kad tiesei $y = kx + b$ priklauso taškas, kurio koordinatės yra $(0; b)$, liks surasti tik vieno taško koordinates.
d), e), f), g), h) — kvadratinė funkcija, jos grafikas yra parabolė. Braižant parabolę naudinga apskaičiuoti jos viršūnės koordinates: abscisę — skaičiuojant kvadratinio trinario šaknų (jeigu jos egzistuoja) arba lygties $ax^2 + bx = 0$ sprendinių aritmetinį vidurkį arba pagal formulę $x_0 = -\frac{b}{2a}$; ordinatę — $y_0 = f(x_0)$ arba pagal formulę $y_0 = -\frac{D}{4a}$, $D = b^2 - 4ac$.
Braižant i)–l) punktų grafikus reikėtų sudaryti duotos funkcijos reikšmių lentelę. Kadangi i)–k) punktuose pateiktos nelyginės funkcijos, tai prisiminus, jog nelyginės funkcijos grafikas yra simetriškas koordinačių pradžios taško atžvilgiu, galima sudarant funkcijos reikšmių lentelę apsiriboti neneigiamomis argumento reikšmėmis.

136. *Nurodymas.* Pakartokite funkcijos $y = |f(x)|$ grafiko braižymą. Remiantis modulio apibrėžimu $|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{kai } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{kai } f(x) < 0, \end{cases}$ funkcijos $y = |f(x)|$ grafiką galima braižyti taip:
1) nubraižome funkcijos $y = f(x)$ grafiką (neryškiai, pagalbine linija);
2) braižome grafiką, simetrišką x ašies atžvilgiu tai grafiko daliai, kuri atitinka neigiamas funkcijos reikšmes (yra žemiau x ašies). Ne žemiau x ašies esančios dalys sudaro funkcijos $y = |f(x)|$ grafiką.



137. *Nurodymas.* Pakartojus atskirų funkcijų (135 užd.) bei funkcijos $y = |f(x)|$ grafiko braižymą (136 užd.) čia didesnių sunkumų neturėtų kilti.

138. Proporcingumo koeficientas $k = \frac{5{,}6}{3{,}5} = 1{,}6$. Objekto šešėlio ilgis $y = 1{,}6x$.
a) ≈ 45 m; b) ≈ 20 m.
Nurodymas. Apie dydžių tiesioginį ir atvirkštinį proporcingumą žr. p. 87.

139. Tarp miestų yra $80 \cdot 4 = 320$ (km).
a) $t(v) = \frac{320}{v}$; b) 3 h 12 min;
c) ne mažesniu kaip 120 km/h. *Nurodymas.* Sprendžiame nelygybę: $\frac{320}{v} \leqslant 2\frac{2}{3}$.

140. a) *Nurodymas.* Remkitės Pitagoro teorema; b) $5\sqrt{2}$, 12;
c) $\sqrt{6}$. *Nurodymas.* $\sqrt{12} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$.

141. a) $S(x) = x^2 + 3x$; b) 6,75; 28; c) 1.

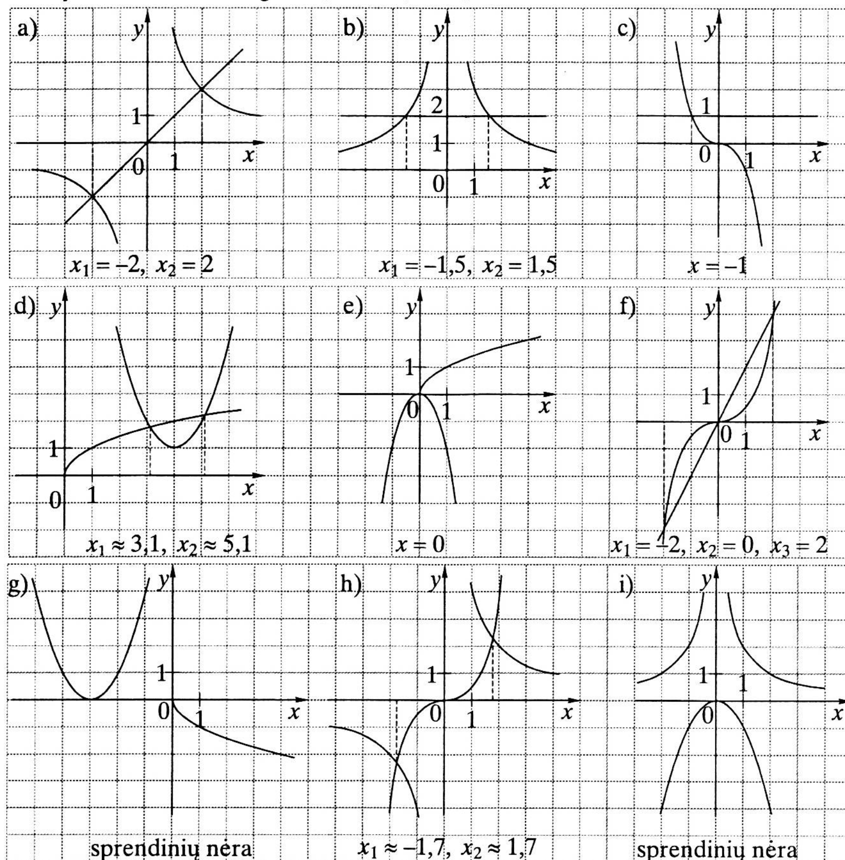
142. a) $S(x) = 160 - 8x$; b) 132, 104; c) 3; d) 10; e) 16.

143. a) $80 - 2x$; b) $S(x) = 80x - 2x^2$; c) $x = 20$; d) 40 m, 20 m.

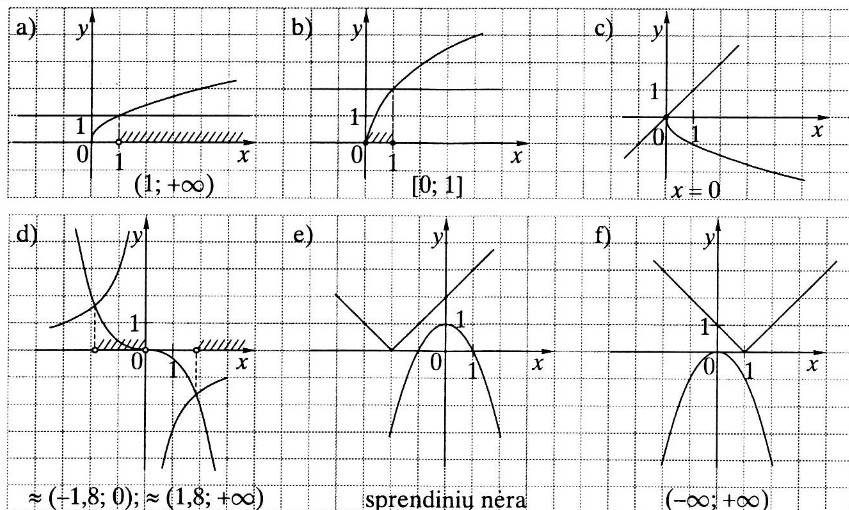
144. a) (1; 1); b) (1; −1), (6; 14); c) $\left(-\frac{1}{2}; 2\frac{1}{4}\right)$, (1; 0); d) (2; 2); e) (0; 0), (1,5; 6,75); f) (0; 0), (−2; 4), (2; −4).
Nurodymas. Silpnesnieji mokiniai gali uždavinį spręsti braižydami duotų funkcijų grafikus, stipresnieji — spręsdami lygtį, gautą remiantis savybe, kad dviejų funkcijų grafikų susikirtimo taške funkcijų reikšmės yra lygios.

145. *Nurodymas.* Norint grafiniu būdu nustatyti lygties sprendinių skaičių, reikia rasti grafikų bendrų taškų (susikirtimo arba lietimosi) skaičių.
Atsakymas. a), d) — 3 sprendiniai; b) — sprendinių nėra; c), f) — 1 sprendinys; e) — 2 sprendiniai.

146. *Nurodymas.* Reikia rasti grafikų bendrų taškų abscises.



147. *Nurodymas.* Norint grafiniu būdu išspręsti nelygybę $f(x) > g(x)$ ($<$, $\geqslant$, $\leqslant$), reikia rasti apibrėžimo srities intervalus, kuriuose funkcijos $f(x)$ grafiko taškai yra aukščiau (žemiau, ne žemiau, ne aukščiau) už atitinkamus funkcijos $g(x)$ grafiko taškus.



148. a) 1207,5 Lt; b) 1388,63 Lt.

149. a) 1219,13 Lt; b) 1365,42 Lt.

150. a) 7,2 Lt; b) 293,96 Lt; c) 36,32 Lt; d) 880,52 Lt.

151. a) 1224 Lt; b) 10,2; c) 311,52 Lt; d) 875,76 Lt.

152. a) 950,67 Lt; b) 231,22 Lt.

153. a) Sakykime, kad Petraičiui per mėnesį apskaičiuojama x Lt atlyginimo. Sprendžiame lygtį: $(x - 280) \cdot 0{,}33 = 303{,}6$; $x = 1200$. Taigi Petraičiui per mėnesį apskaičiuojama 1200 Lt atlyginimo;
b) 36 Lt.

154. a) Sudarome proporciją:

$$\begin{aligned} 980\,\text{Lt} &— 100\%, \\ x\,\text{Lt} &— 120\%, \end{aligned} \quad x = 1176\,(\text{Lt});$$

b) $1176 - 980 = 196$ (Lt);
c) per 4 mėn.

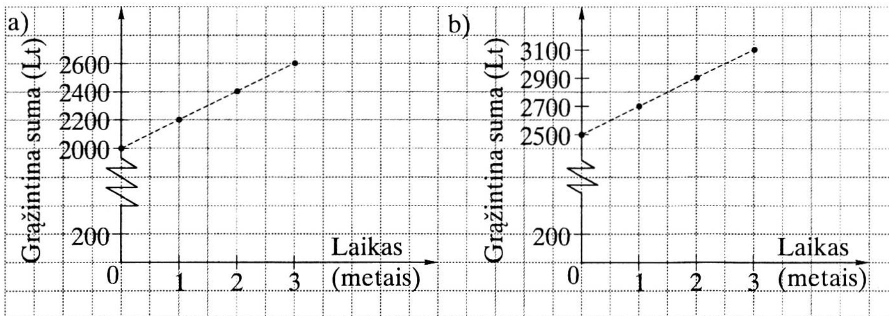
155. Pajamos buvo 1200 Lt, o išlaidos — 930 Lt.

156. a) Sakykime, kad pastoviosios išlaidos per mėnesį yra x Lt. Tada kintamosios išlaidos yra $0{,}6x$ Lt. Pagal sąlygą: $x + 0{,}6x = 2400$, $x = 1500$ (Lt);
b) $\frac{2400 \cdot 125}{100} = 3000$ (Lt);
c) $3000 - 2400 = 600$ (Lt).

157. a) $8112 = 7500(1 + \frac{p}{100})^2$, $(1 + \frac{p}{100})^2 = 1{,}0816$. Kadangi $1 + \frac{p}{100} > 0$, tai $1 + \frac{p}{100} = 1{,}04$, $p = 4\%$.
b) Po trejų metų sąskaitoje bus $7500(1 + \frac{4}{100})^3 = 8436{,}48$ (Lt). Vadinasi, palūkanų bus $8436{,}48 - 7500 = 936{,}48 \approx 936$ (Lt).
c) Po trejų metų sąskaitoje liko $8436{,}48 - 5000 = 3436{,}48$ (Lt). Po penkerių metų sąskaitoje bus $3436{,}48 \cdot 1{,}04^2 = 3716{,}90 \approx 3720$ (Lt).

158. a) 720 Lt, 1440 Lt, 2160 Lt, 2880 Lt, 3600 Lt;
b) 720 Lt, 1504,8 Lt, 2360,23 Lt, 3292,65 Lt, 4308,99 Lt.

159. *Nurodymas*. Kadangi palūkanos kasmet padidėja tiek pat litų (200), vadinasi, yra sutartos paprastosios palūkanos.
a) 2000 Lt, 2600 Lt; b) 2500 Lt, 3100 Lt.



160. a) $\frac{2000}{6{,}59} \approx 303{,}49$ (svarų sterlingų); b) $250 \cdot 6{,}39 = 1597{,}5$ (Lt).

161. 771,00 Latvijos latų, 5289,89 Lenkijos zlotų, 36 818,85 Rusijos rublių, 1 839 994,11 Baltarusijos rublių.

162. a) $\frac{2000 \cdot 3{,}7024}{1{,}95583} \approx 3786{,}01$ (LTL); b) $\frac{2000 \cdot 1{,}95583}{3{,}7024} \approx 1056{,}52$ (DEM).

163. a) Sakykime, kad džinsų didmeninė kaina yra x Lt. Pagal sąlygą: $x + 0{,}25x = 89{,}99$, $x \approx 71{,}99$ (Lt);
b) $89{,}99 - 71{,}99 = 18$ (Lt);
c) $\frac{89{,}99 \cdot 18}{118} \approx 13{,}73$ (Lt);
d) $(18 - 13{,}73) \cdot 50 = 213{,}5$ (Lt).

164. a) $400 \cdot 1{,}3 = 520$ (Lt); b) $520 - 400 = 120$ (Lt); c) $\frac{520 \cdot 18}{118} \approx 79{,}32$ (Lt);
d) $120 - 79{,}32 = 40{,}68$ (Lt); e) $\frac{40{,}68 \cdot 100}{400} = 10{,}17(\%)$.

165. Sakykime, kad parduotuvė turi parduoti prekę už x Lt. Tada PVM bus $\frac{18x}{118}$ Lt. Sprendžiame lygtį: a) $x - 50 - \frac{18x}{118} = 10{,}5$; b) $x - 50 - \frac{18x}{118} = 13{,}7$.
Atsakymas. a) 71,39 Lt; b) 75,17 Lt.

166. a) $\frac{88{,}5\cdot(100-7{,}4)}{100} \approx 81{,}95$ (Lt); b) $\frac{87{,}97\cdot 100}{100-7{,}4} = 95$ (Lt).

167. a) $\frac{(6{,}55-4{,}99)\cdot 100}{6{,}55} \approx 23{,}82(\%)$; b) $\frac{(29{,}59-23{,}79)\cdot 100}{29{,}59} \approx 19{,}60(\%)$.

168. a) $120 \cdot (1 - \frac{5}{100})^4 \approx 97{,}74$ (Lt); b) $\frac{(120-97{,}74)\cdot 100}{120} = 18{,}55(\%)$.

169. a) $80 \cdot (1 + \frac{5}{100})^4 \approx 97{,}24$ (Lt); b) $\frac{(97{,}24-80)\cdot 100}{80} = 21{,}55(\%)$.

170. a) $\frac{(5500-4000)\cdot 100}{4000} = 37{,}5(\%)$;
b) baldų komplektas buvo parduotas už $5500 \cdot 0{,}95 = 5225$ (Lt). Vadinasi, procentinis antkainis buvo $\frac{(5225-4000)\cdot 100}{4000} \approx 30{,}63(\%)$;
c) $\frac{5225\cdot 18}{118} \approx 797{,}03$ (Lt);
d) pardavusi baldų komplektą be nuolaidos ir sumokėjusi PVM, parduotuvė būtų gavusi $5500 - 4000 - \frac{5500\cdot 18}{118} \approx 661{,}02$ (Lt) pajamų. Pardavusi baldų komplektą su nuolaida ir sumokėjusi PVM, parduotuvė gavo $5225 - 4000 - 797{,}03 = 427{,}97$ (Lt) pajamų. Taigi parduotuvė „praranda“ $661{,}02 - 427{,}97 = 233{,}05$ (Lt).

171. a) 500; 120; 380; b) 520; 10; 468; c) 5100; 600; 456; d) 3048; 452; 406,8.

172. a) 7500 Lt; b) 25 Lt; c) 30 Lt; d) 20%; e) 42 Lt; f) 12 Lt; g) 12 600 Lt; h) 1922,03 Lt; i) 1677,97 Lt; j) 1260 Lt; k) 417,97 Lt; l) 317,66 Lt.

173. a) $1300 + 2 \cdot 12 \cdot 75 = 3100$ (Lt); b) $3100 - 2500 = 600$ (Lt);
c) $2500 - 1300 = 1200$ (Lt); d) $600 = 1200 \cdot \frac{p}{100} \cdot 2$, $p = 25\%$.

174. Verta skolintis ir pirkti iš karto.
Nurodymas. Pirkimo išsimokėtinai palūkanų norma yra $26\frac{2}{3}\%$.

175. *I būdas.* Birželio mėnesį suvartotos elektros energijos kiekį galima apskaičiuoti remiantis: a) geometrinės progresijos; b) aritmetinės progresijos n-tojo nario formule, t. y.:
a) $b_1 = 150$, $q = 0{,}98$, $b_6 = 150 \cdot 0{,}98^5 \approx 136$ (kWh);
b) $a_1 = 150$, $d = -3$, $a_6 = 150 - 5 \cdot 3 = 135$ (kWh).
Iš viso per pusę metų suvartotos elektros energijos kiekį galima apskaičiuoti remiantis: a) geometrinės progresijos; b) aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumos formule, t. y.:
a) $S_6 = \frac{b_6q-b_1}{q-1} = \frac{150\cdot 0{,}98^6-150}{0{,}98-1} = \frac{150\cdot(0{,}98^6-1)}{-0{,}02} \approx 856$ (kWh);
b) $S_6 = \frac{(a_1+a_6)\cdot 6}{2} = \frac{(150+135)\cdot 6}{2} = 855$ (kWh).
II būdas. Šeima suvartojo elekros energijos (kWh):
sausio mėnesį: a) 150; b) 150;
vasario mėnesį: a) $150 \cdot 0{,}98 = 147$; b) $150 - 3 = 147$;
kovo mėnesį: a) $147 \cdot 0{,}98 \approx 144{,}1$; b) $147 - 3 = 144$;
balandžio mėnesį: a) $144{,}06 \cdot 0{,}98 \approx 141{,}2$; b) $144 - 3 = 141$;
gegužės mėnesį: a) $141{,}18 \cdot 0{,}98 \approx 138{,}4$; b) $141 - 3 = 138$;
birželio mėnesį: a) $138{,}36 \cdot 0{,}98 \approx 135{,}6$; b) $138 - 3 = 135$;
iš viso per pusę metų: a) $150 + 147 + 144{,}1 + 141{,}2 + 138{,}4 + 135{,}6 \approx 856$;
b) $150 + 147 + 144 + 141 + 138 + 135 = 855$.
Pastaba. Buitinis elektros skaitiklis rodo kilovatvalandes (kWh) dešimtosios tikslumu.

Daugiau dėmesio skiriama statistikos uždaviniams, kuriuos mokiniai nagrinėjo 6–8 kl. Tikimybėms ir kombinatorikai kartoti patariama taip pat naudoti 9 kl. ir 10 kl. uždavinynus.

176. a) Anglų kalbą rinkosi 22, vokiečių — 10, prancūzų — 8, rusų — 6, italų — 2 mokiniai; b) 48;

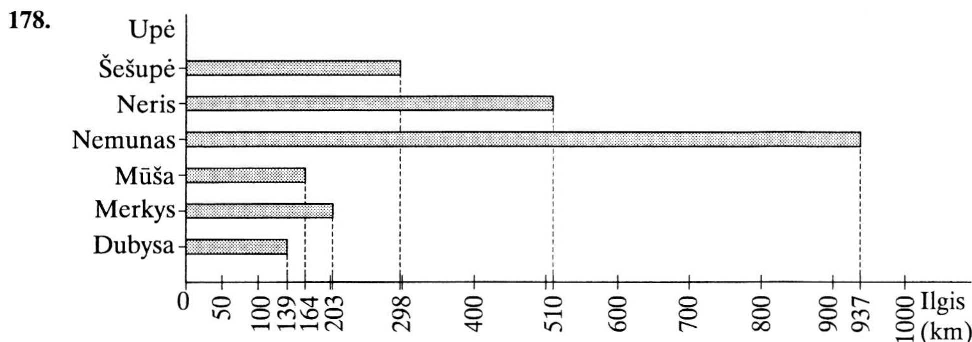
c) *Nurodymas.* Skritulinės diagramos centrinis kampas, atitinkantis anglų kalbą pasirinkusių mokinių skaičių, yra $\frac{22 \cdot 360°}{48} = 165°$, vokiečių — 75°, prancūzų — 60°, rusų — 45°, italų — 15°;

d) $\frac{1}{24}$; e) $\frac{23}{24}$.

177. a) *Nurodymas.* Skritulinės diagramos centrinis kampas, atitinkantis 20% žmonių yra $\frac{20 \cdot 360°}{100} = 72°$, 30% — 108°, 15% — 54°, 10% — 36°, 25% — 90°.

b) Informacines laidas mėgsta žiūrėti $\frac{600 \cdot 20}{100} = 120$, o sportines — $\frac{600 \cdot 15}{100} = 90$ žmonių.

178.

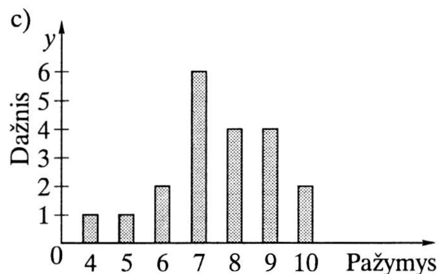


179. a) 4, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10;

b)

Pažymys	4	5	6	7	8	9	10
Dažnis	1	1	2	6	4	4	2

c)



d) 7,55.

181. a) Aštuoni mokiniai gavo 7; b) vienas mokinys gavo 3;

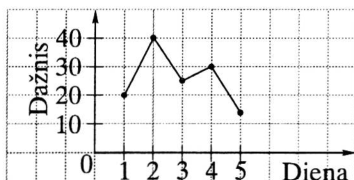
c)

Pažymys	3	4	5	6	7	8	9	10
Dažnis	1	2	4	6	8	4	3	2

d) 30; e) ≈ 6,7; f) $16\frac{2}{3}$%; g) 40%.

182.

Diena	1	2	3	4	5
Dažnis	20	40	25	30	15

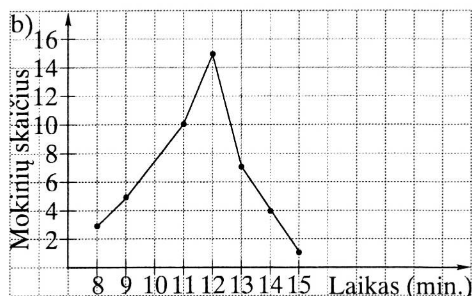


Iš viso per 5 darbo dienas parduota 130 marškinėlių.

183. a) 21; b) 108; c) ≈ 5,1.

184. a) Imties dydis yra 45, o imties plotis yra 7;

b)



185. Sakykime, kad mokinių skaičių vaizduojančioje ašyje viena padala atitinka x. Tada berniukų yra $2x$, o mergaičių $3x$. Sprendžiame lygtį: $2x + 3x = 720$, $x = 144$. Taigi mokykloje yra 432 mergaitės ir 288 berniukai.

186. a) Televizorių žiūri 40, sportuoja — 20, žaidžia kompiuteriu ir lanko įvairius būrelius — po 10 berniukų;

b)

Laisvalaikio praleidimo formos	Žiūri televizorių	Sportuoja	Žaidžia kompiuteriu	Lanko įvairius būrelius
Dažnis	40	20	10	10

187. a) 165; b) knygyne A vidutiniškai apsilankė 13, o knygyne B — 14 pirkėjų; c) tarp I ir II bei III ir IV valandos pirkėjų srautas didėjo; tarp II ir III bei V ir VI — mažėjo; tarp IV ir V — nesikeitė; d) I, II, IV.

188. Vidurkis: a) 6; b) 5,5; c) $\approx 5,2$; mediana: a) 5; b) 5,5; c) 5.

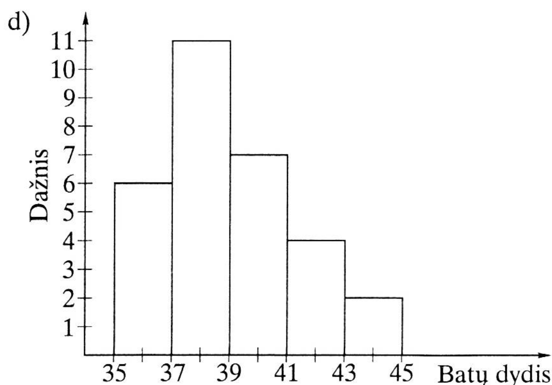
189. a) [35–37): 35, 35, 36, 36, 36, 36;
[37–39): 37, 37, 37, 37, 37, 37, 38, 38, 38, 38, 38;
[39–41): 39, 39, 39, 39, 39, 40, 40;
[41–43): 41, 41, 42, 42;
[43–45): 43, 44;

b)

Intervalas	[35–37)	[37–39)	[39–41)	[41–43)	[43–45)
Dažnis	6	11	7	4	2

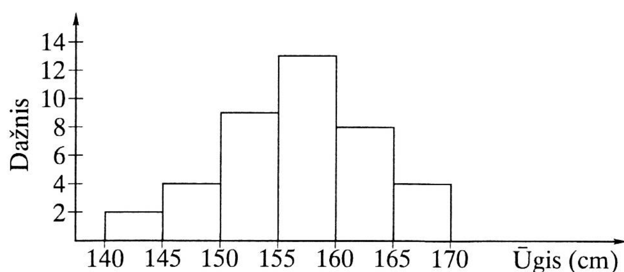
c) imties dydis yra 30, o plotis yra 9.

d)



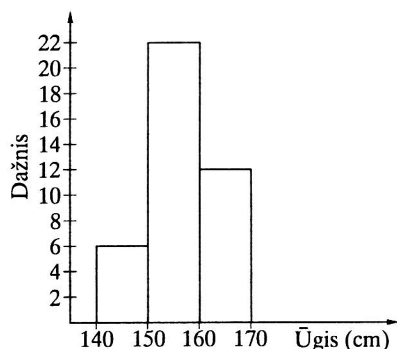
190. a)

Intervalas	[140–145)	[145–150)	[150–155)	[155–160)	[160–165)	[165–170)
Dažnis	2	4	9	13	8	4



b)

Intervalas	[140–150)	[150–160)	[160–170)
Dažnis	6	22	12



191. a) $\frac{3}{7}$; b) $\frac{4}{7}$; c) 0.

192. hh, hs, sh, ss; $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(C) = \frac{3}{4}$.

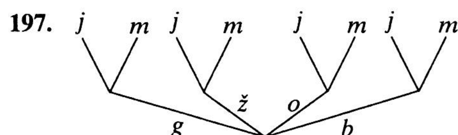
193. $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{9}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{6}$, $\mathbf{P}(C) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(D) = \frac{5}{12}$.

194. $\mathbf{P}(A) = \frac{5}{16}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}(C) = \frac{5}{8}$, $\mathbf{P}(D) = \frac{1}{4}$.

195. a) 0,24; b) 0,96; c) $\frac{7}{9}$; d) $\frac{11}{17}$.

196. 0,998.

197.



Iš viso yra 8 skirtingos galimybės: $gj, gm, žj, žm, oj, om, bj, bm$.

198. $5 \cdot 4 = 20$.

199. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$; $\frac{1}{120}$.

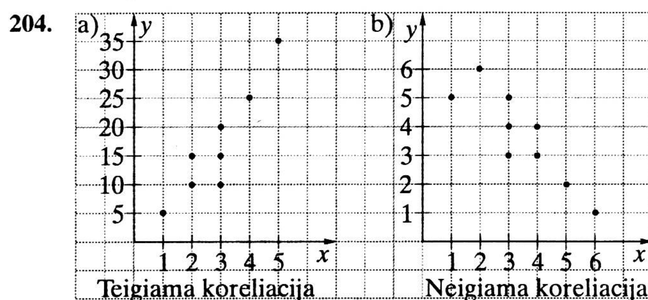
200. $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

201. Kai skaitmenys kartojasi: a) 27; b) 64; c) 48;
kai skaitmenys nesikartoja: a) 6; b) 24; c) 18.

202. a) $\frac{1}{500}$; b) $\frac{499}{500}$.

203. a) Teigiama koreliacija; b) nėra koreliacijos; c) neigiama koreliacija.

204.



205. a) $\frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$; b) $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$; c) $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252$.

206. Taip.

207. a) $\frac{5}{14}$; b) $\frac{3}{28}$.

II DALIS

1. Kampai

208–221 uždaviniai skirti pakartoti kampų rūšis (208–211 — smailusis, statusis, bukasis, ištiestinis, išvirkštinis, pilnutinis; 212–214 — gretutiniai; 215, 216 — gretutiniai ir kryžminiai; 217 — centrinis ir įbrėžtinis kampai; 218–221 — kampai, gauti dvi tieses perkirtus trečiąja); 222 — kampo pusiaukampinė; 223–226, 227a — trikampio kampai; 227b,c–231 — keturkampių kampai; 232–236 — kampų nuo 0° iki 180° sinusas, kosinusas ir tangentas.

208. a) 115°; b) 155°; c) 65°.

209. a) 78°; b) 156°.

210. a) 67,5°; b) 135°.

211. a) 20%; b) 30%; c) 50%; d) 90%.

212. 126°, 54°.

213. 30°, 150°.

214. a) 100°; b) 30°; c) 30°.

215. 99°, 81°, 99°.

216. a) $x = 58°$, $y = 122°$; b) $x = 95°$, $y = 135°$; c) $x = 40°$, $y = 60°$.

217. a) 65°; b) 90°; c) 55°; d) 140°.

218. a) Keturi kampai po 80° ir keturi kampai po 100°.
b) Keturi kampai po 75° ir keturi kampai po 105°.

219. 30°.

220. a) 1) Taip; 2) ne;
b) $\angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360°$, tai $\angle 8 = 360° - 312° = 48°$. $\angle 2 = \angle 4$ (kryžminiai kampai), tai $\angle 2 = 96° : 2 = 48°$. Kadangi $\angle 2 = \angle 8$, o tai yra vidaus priešiniai kampai, tai $a \parallel b$.

221. a) 25°; b) 91°.

222. 117°.

223. a) 30°; b) 35°; c) 30°, 30°, 120°.

224. 15°, 75°, 90°.

225. a) 120°; b) 85°; c) 25°.

226. 90°.

227. a) $x = 120°$, $y = 60°$; b) $x = 140°$, $y = 40°$; c) $x = 40°$, $y = 30°$.

228. a) 72°, 108°, 72°, 108°; b) 84°, 96°, 84°, 96°; c) 45°, 135°, 45°, 135°.

229. 65°, 25°.

230. 70°, 110°, 70°, 110°.

231. a) 160°, 160°, 20°; b) 80°, 80°, 100°, 100°; c) 90°, 90°, 108°, 72°.

232. a) 10; b) 4; c) $2\sqrt{3}$; d) $4\sqrt{2}$.

233. $x = \frac{8}{\operatorname{tg} 59°} \approx 4{,}81$ (m).

234. $x = 1500 \sin 5° \approx 130{,}5$ (m). *Pastaba.* Atsakymas pateiktas imant sinuso reikšmę tūkstantųjų tikslumu.

235. a) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$ arba $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$;
b) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$.
Pastaba. Galite su moksleiviais pakartoti, kada $\cos\alpha < 0$ ($\operatorname{tg}\alpha < 0$) ir kada $\cos\alpha > 0$ ($\operatorname{tg}\alpha > 0$).

236. a) 2; b) 0.

2. Trikampiai

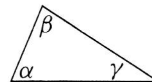
Sprendžiant šio skyrelio uždavinius reikia žinoti trikampio pusiaukraštinių ir pusiaukampinės savybes, Talio teoremą ir išvadą, Pitagoro teoremą, trikampio panašumo požymius, trikampių rūšis, trikampio kampų ir kraštinių priklausomybę, atstumo tarp dviejų taškų formulę, sinusų ir kosinusų teoremas, trikampio ploto formulę.

237. a) 40°, 70°, 70°; b) 50°, 65°, 65°.

238. a) $\angle A = 60°$, $\angle B = 90°$, $\angle C = 30°$; b) $\angle A = 69°$, $\angle B = 92°$, $\angle C = 19°$.

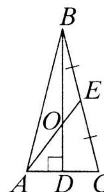
239. a) Sakykime, kad $\beta > \alpha + \gamma$. Remiantis trikampio kampų sumos savybe $\alpha + \beta + \gamma = 180°$; $\alpha + \gamma = 180° - \beta$. Vadinasi, $180° - \beta < \beta$ ir $\beta > 90°$. Taigi trikampis yra bukasis.

b) Analogiškai samprotaudami įsitikiname, kad b) ir c) punktuose trikampis yra statusis.

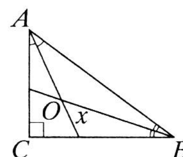


240. a) $45\sqrt{3} \approx 78\,\text{cm}^2$; b) $30\,\text{cm}^2$; c) $\approx 4{,}98\,\text{cm}^2$.

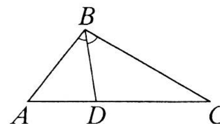
241. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot AC = 20AC$. Pagal trikampio pusiaukraštinių savybę turime: $AO = \frac{2}{3}AE = \frac{2}{3} \cdot 25 = \frac{50}{3}$ (cm), $OD = \frac{1}{3}BD = \frac{1}{3} \cdot 40 = \frac{40}{3}$ (cm). Iš stačiojo $\triangle ADO$: $AD = \sqrt{AO^2 - OD^2} = \sqrt{(\frac{50}{3})^2 - (\frac{40}{3})^2} = 10$ (cm). Tada $AC = 2AD = 2 \cdot 10 = 20$ (cm), $S_{ABC} = 20 \cdot 20 = 400\,(\text{cm}^2)$.
Atsakymas. $400\,\text{cm}^2$.



242. Sakykime, kad $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. $\angle AOB = 180° - (\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}) = 180° - \frac{\alpha+\beta}{2}$; $\alpha + \beta = 90°$, tai $\angle AOB = 180° - \frac{90°}{2} = 135°$. Tada $\angle x = 180° - 135° = 45°$.
Atsakymas. 45°.



243. Sakykime, kad $\triangle ABD$ — lygiakraštis. Tada $\angle A = \angle ABD = \angle ADB = 60°$. Bet ir $\angle DBC = 60°$, nes BD — kampo B pusiaukampinė. Vadinasi, $\angle ABC = 120°$. Tada $\angle C = 180° - 60° - 120° = 0°$. O taip būti negali. Analogiškai įsitikiname, kad $\triangle BCD$ taip pat negali būti lygiakraštis.



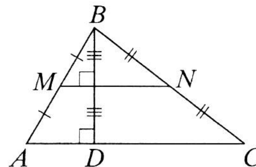
244. 14,4 cm arba 22,5 cm. *Nurodymas.* Taikykite trikampio pusiaukampinės savybę.

245. 24 cm ir 32 cm.

246. 85 cm. *Nurodymas.* Kampo B pusiaukampinė kraštinę AC dalija į dvi 28 cm ir 12 cm ilgio atkarpas skaitant nuo viršūnės A.

247. a) 18 cm; b) 22 cm.

248. $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$, $S_{MBN} = \frac{1}{2}MN \cdot \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AC \cdot \frac{1}{2}BD = \frac{1}{4}S_{ABC}$;
$S_{AMNC} = S_{ABC} - S_{MBN} = S_{ABC} - \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{3}{4}S_{ABC}$;
$\frac{S_{AMNC}}{S_{MBN}} = \frac{\frac{3}{4}S_{ABC}}{\frac{1}{4}S_{ABC}} = \frac{3}{1}$.



249. 1 km. *Nurodymas.* Remkitės Talio teoremos išvada.

250. 7 cm.

251. 2,4 cm.

252. a) *Nurodymas.* Remkitės teorema, atvirkštine Talio teoremai.

b) $ED \perp BC$. *Nurodymas.* Apskaičiuokite ED ilgį ir remkitės teorema, atvirkštine Pitagoro teoremai.

253. 17 cm.

254. 18 cm. *Nurodymas.* Remkitės statinio, esančio prieš 30° kampą, savybe.

255. $18\sqrt{3}$ dm. *Nurodymas.* Remkitės faktu, kad trikampyje prieš didesnį kampą yra ilgesnė kraštinė, bei statinio, esančio prieš 30° kampą, savybe.

256. 12 cm ir 36 cm.

257. $\sin C = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\angle C \approx 18°$.

258. $\operatorname{tg} A = \frac{1}{2}$, $\angle A \approx 27°$.

259. $25 \operatorname{tg} 32° \approx 15{,}6$ (m).

260. $AB = 2a$, $BD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$, $AD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$, $DC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

261. a) 6; b) 10; c) $\approx 53°$; d) 4,8.

262. a) $\approx 37°$; b) 4,8; c) 8,64; d) 2,88.

263. $\approx 44{,}2$. *Pastaba.* Atsakymas pateiktas imant trigonometrinių funkcijų reikšmes tūkstantųjų tikslumu.

264. a) Ne; b) taip; c) taip.

265. a) Taip; b) taip; c) ne.

266. 5 cm. *Nurodymas.* $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ pagal du kampus.

267. 9 cm. *Nurodymas.* $\triangle ABC \backsim \triangle DAC$ pagal du kampus ($\angle ADC = \angle BAC$ — duota, $\angle C$ — bendras).

268. 294 cm^2. *Nurodymas.* Remkitės trikampių AEO ir ODB panašumu.

269. a) 4; b) $2\frac{2}{3}$; c) 5; d) 4.

270. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų; $BC = 20$ cm.

271. 4 dm. *Nurodymas.* Remkitės teorema, kad panašiųjų trikampių atitinkamos aukštinės proporcingos atitinkamoms kraštinėms.

272. 30 cm. *Nurodymas.* Remkitės teorema, kad panašiųjų trikampių plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui.

273. a) $BC = 70$ cm, $\angle B \approx 38°$, $\angle C \approx 22°$;
b) $BC = 35$ cm, $\angle B \approx 82°$, $\angle C \approx 38°$;
c) $BC = 15$ cm, $\angle B \approx 37°$, $\angle C \approx 98°$.

274. a) $b \approx 27{,}3$, $c \approx 24{,}5$, $\angle A = 45°$; b) $a \approx 16{,}7$, $c \approx 24{,}9$, $\angle C = 119°$; c) $c \approx 8{,}7$, $\angle B \approx 21°$, $\angle C \approx 39°$; d) tokio trikampio nėra.
Pastaba. Atsakymas pateiktas imant trigonometrinių funkcijų reikšmes tūkstantųjų tikslumu.

275. $\angle A \approx 42°$, $\angle B \approx 53°$, $\angle C \approx 85°$.

3. Keturkampiai

276–295 uždaviniai skirti pakartoti lygiagretainiui ir jo savybėms (277–284 — lygiagretainis; 285–288, 276b — stačiakampis; 289–294, 276a — rombas; 295 — kvadratas), 296–309 — trapecijai, 310 — deltoidui. Spręsdami 311 uždavinį pakartosite įbrėžtinio, o 312, 313 — apibrėžtinio keturkampių savybes. 314–316 uždaviniai skirti panašiųjų keturkampių savybėms prisiminti, 317, 318 — brėžimo uždaviniai.

276. Išmatuoti: a) visas kraštines; b) įstrižaines.

277. 56 cm.

278. 27 cm arba 30 cm.

279. a) 24 cm; b) 20 cm.

280. a) 112 cm; b) 12 cm.

281. a) $\approx 45\,\text{cm}^2$; b) ≈ 11 cm, ≈ 14 cm; c) $\approx 35°$.

282. 6 dm, 7 dm. *Pastaba.* Sąlygoje yra korektūros klaida. Turėtų būti: „... jeigu viena iš jų 1 dm trumpesnė už kitą“.

283. $S_{NBFE} = 2S_{\triangle BNE} = 2S_{\triangle CNM} = 2 \cdot \frac{1}{2}MN \cdot h = MN \cdot h$ (čia h — $\triangle MCN$ aukštinė, nubrėžta į krašinę MN). $MN = \frac{1}{2}AB$, $h = \frac{1}{2}H$ (čia H — $\triangle ACB$ aukštinė, nubrėžta į kraštinę AB), tai $S_{NBFE} = \frac{1}{2}AB \cdot \frac{1}{2}H = \frac{1}{2}S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15\,(\text{cm}^2)$.

284. 30°, 150°, 30°, 150°.

285. 3200 m, 60 ha.

286. *Nurodymas.* Įsitikinkite, kad keturkampis $CB_1C_1A_1$ yra stačiakampis.

287. 35°, 55°.

288. 7,5 cm.

289. a) 20 dm; b) $24\,\text{dm}^2$; c) 4,8 dm; d) 2,4 dm.

290. 60°, 120°, 60°, 120°.

291. 60°, 120°, 60°, 120°.

292. 75°, 105°, 75°, 105°.

293. a) *Nurodymas.* Nubrėžkite keturkampio įstrižaines ir remkitės trikampių lygumo bei dviejų tiesių lygiagretumo požymiais.
b) *Nurodymas.* Nubrėžkite lygiagretainio įstrižaines ir įsitikinkite, kad gauti keturi statieji trikampiai yra lygūs.

294. 84°, 96°, 84°, 96°.

295. $P = 16\sqrt{2}$ cm, $S = 32\,\text{cm}^2$, $r = 2\sqrt{2}$ cm.

296. 30°, 150°, 90°, 90°.

297. 30°, 150°, 150°, 30°.

298. a) 68 cm; b) 8 cm, 16 cm.

299. 15 cm.

300. $S = 1200\,\text{cm}^2$, $P = 142$ cm.

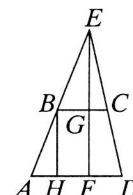
301. a) 7,5 ha; b) $\approx 1116{,}23$ cm.

302. 2) *Nurodymas.* Remdamiesi teorema, atvirkštine Pitagoro teoremai, įsitikinkite, kad gauto keturkampio $\angle A = \angle B = 90°$.
3) 48.

303. ≈ 6 m.

304. $AB = 5{,}625$ cm, $BC = 6{,}75$ cm. *Nurodymas.* $\triangle ABC \backsim \triangle DCA$ pagal du kampus.

305. Pagal sąlygą $AD = 32$ cm, $BC = 20$ cm, $BH = 24$ cm. Reikia apskaičiuoti atstumą EF. $\triangle AED \backsim \triangle BEC$ pagal du kampus, tai $\frac{AD}{BC} = \frac{EF}{EG}$. Kadangi $EG = EF - 24$, tai $\frac{32}{20} = \frac{EF}{EF-24}$ ir $EF = 64$ cm.



306. 48 cm.

307. 16,2 cm ir 12,6 cm.

308. 25 cm, 10 cm, 30 cm, 12 cm. *Nurodymas*. Tegul ilgesnysis trapecijos pagrindas yra AD, trumpesnysis — BC, o įstrižainių susikirtimo taškas yra O. Remkitės tuo, kad $\triangle AOD \backsim \triangle COB$.

309. 15 cm, 9 cm, 20 cm, 12 cm.

310. $P_{ABCD} = 2(5 + \sqrt{10})$, $S = 15$. *Nurodymas*. Įsitikinkite, kad $\angle AOD = 90°$.

311. 90°.

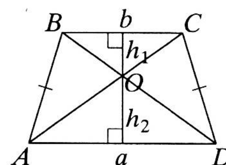
312. 10 cm.

313. 18 cm.

314. *Pastaba*. Turbūt tik nedaugelis pastebės, kad keturkampio, kurio kraštinių ilgiai yra 5 dm, 8 dm, 6 dm ir 9 dm, plotas negali būti lygus 60 dm^2. (Duoto keturkampio perimetras yra $5 + 8 + 6 + 9 = 28$ (dm). Didžiausio ploto keturkampis, kurio perimetras lygus 28 dm, yra kvadratas, kurio kraštinės ilgis yra 7 dm. Tada jo plotas lygus 49 dm^2.) Tai korektūros klaida. Turėtų būti ne 60 dm^2, o 40 dm^2.
Atsakymas. 7,5 dm, 12 dm, 9 dm, 13,5 dm; 90 dm^2.

315. 120 cm ir 80 cm.

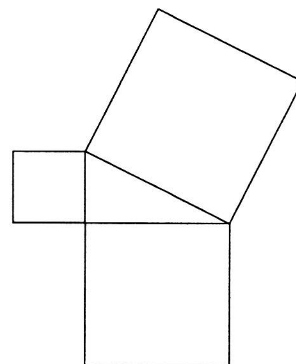
316. a) Tegul $AD = a$, $BC = b$. Pagal sąlygą $\frac{a+b}{2} = 20$, tai $a + b = 40$ (cm). $\triangle AOD \backsim \triangle COB$ (pagal du kampus), tai $S_{AOD} = k^2 S_{BOC}$, $108 = k^2 \cdot 48$, $k = 1{,}5$. Tada $h_2 = 1{,}5h_1$. Kadangi $S_{AOD} = 108$, $S_{BOC} = 48$, tai $\frac{1}{2}ah_2 = 108$ ir $\frac{1}{2}bh_1 = 48$. Iš čia $ah_2 = 216$ ir $bh_1 = 96$. Kadangi $h_2 = 1{,}5h_1$, tai $ah_2 = 1{,}5ah_1 = 216$. Iš čia $ah_1 = 144$. Sudėję panariui lygybes $ah_1 = 144$ ir $bh_1 = 96$ turėsime: $(a + b)h_1 = 240$, $40h_1 = 240$ ir $h_1 = 6$ cm. Tada $h_2 = 9$ cm, trapecijos aukštinės ilgis lygus $6 + 9 = 15$ (cm), o $S_{ABCD} = 20 \cdot 15 = 300$ (cm^2);



b) 25 cm, 25 cm.

317. a) *Nurodymas*. Nubraižykite trikampį, kai žinomos visos trys jo kraštinės, ir papildykite iki lygiagretainio.
b) *Nurodymas*. Nubraižykite trikampį, kai žinomos jo dvi kraštinės ir kampas tarp šių kraštinių, ir papildykite iki lygiagretainio.
c) *Nurodymas*. Nubraižykite statųjį trikampį, kai žinomas jo vienas statinis ir įžambinė, ir papildykite iki stačiakampio.
d) *Nurodymas*. Nubrėžkite dvi statmenas tieses. Jų susikirtimo tašką pažymėkite O. Iš taško O vienoje tiesėje atidėkite $OA = OC = 10$ cm, o kitoje $OB = OD = 8$ cm. Keturkampis $ABCD$ — rombas.
e) *Nurodymas*. Nubraižykite statųjį trikampį, kai žinomas jo vienas statinis ir įžambinė, ir papildykite iki trapecijos.

318. *Nurodymas*.
a) Nubraižykite statųjį trikampį, kurio statinių ilgiai yra 2 cm ir 1 cm. Ant įžambinės nubraižykite kvadratą. Jo plotas lygus duotųjų kvadratų plotų sumai.
b) Nubraižykite statųjį trikampį, kurio įžambinės ilgis yra 2 cm, o vieno statinio ilgis yra 1 cm. Ant kito statinio nubraižykite kvadratą. Jo plotas lygus duotųjų kvadratų plotų skirtumui.



319–322 uždaviniais kartojama apskritimo (skritulio) ilgis ir plotas; 323–325 — apskritimo lygtis; 326–330 — apskritimo ir tiesės tarpusavio padėtis (326, 329, 330 — liestinės savybė; 327 — liestinės ir liestinių, išeinančių iš vieno taško, atkarpų savybės; 328 — stygos savybė); 331–336 — apskritimo ir kampo tarpusavio padėtis (331a,b, 332 — centrinis kampas, 331c,d 333–335 — įbrėžtinis kampas); 336, 337, 344 — apibrėžtinis apskritimas; 338–343, 345 — įbrėžtinis apskritimas (342, 343 — kartojamos ir liestinės bei liestinių, išeinančių iš vieno taško, atkarpų savybės); 346–349 — skritulio išpjova ir nuopjova.

319. a) 3 cm; b) 6 cm; c) $\approx 28{,}27\,\text{cm}^2$. (*Pastaba.* Atsakymas pateiktas imant π reikšmę aštuonių ženklų po kablelio tikslumu, t. y. skaičiuojant skaičiuokliu. Imdami $\pi \approx 3{,}14$ gauname, kad $S \approx 28{,}26\,\text{cm}^2$.)

320. a) Padidės 2,25 karto; b) sumažės 4 kartus; c) padidės 9 kartus; d) sumažės 16 kartų.

321. $\approx 15{,}7$ cm.

322. Pjūklo krašto ilgis yra 750π mm $= 0{,}75\pi$ m. Pjūklas 1 kartą apsisuka per $\frac{0{,}75\pi}{30} = \frac{\pi}{40}$ (s), t. y. per $\frac{\pi}{40 \cdot 60} = \frac{\pi}{2400}$ (min.). Tada per 1 min. pjūklas apsisuka $\frac{2400}{\pi} \approx 764$ kartus.

323. a) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$; b) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$.

324. a) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 34$; b) $x^2 + (y-4)^2 = 5$.

325. a), b) — taip. *Nurodymas.* Patikrinkite, ar: 1) priklauso duotam apskritimui taškai: a) A ir B; b) C ir D; 2) a) $\frac{AB}{2} = R$; b) $\frac{CD}{2} = R$.

326. 12 cm.

327. 18.

328. a) 8 cm; b) 10π dm.

329. 48 cm.

330. 74 cm.

331. a) 30°; b) 45°; c) 40°; d) 100°.

332. a) 160°; b) 150°.

333. *Pastaba.* Uždavinio sąlygą reikėtų patikslinti. Turėtų būti: „Apskritimas taškais A, B ir C padalytas į tris lankus AB, BC ir CA taip, kad $\smile AB : \smile BC : \smile CA = 3 : 5 : 4$. Apskaičiuokite trikampio ABC kampus“. Tada atsakymas būtų toks: $\angle A = 75°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 45°$.
Kadangi sąlygoje nėra pasakyta, nuo kurio taško imant duotas ilgių santykis, tai atsakymas būtų toks:
$\angle A = 75°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 45°$;
arba $\angle A = 75°$, $\angle B = 45°$, $\angle C = 60°$;
arba $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$, $\angle C = 75°$;
arba $\angle A = 60°$, $\angle B = 75°$, $\angle C = 45°$;
arba $\angle A = 45°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 75°$;
arba $\angle A = 45°$, $\angle B = 75°$, $\angle C = 60°$.

334. 120°.

335. 70°. *Nurodymas.* Įsitikinkite, kad $\triangle ADB$ yra statusis, kurio $\angle A = 50°$, o $\angle ABD = 40°$. Įsitikinkite, kad $\triangle BOC$ — lygiakraštis. Tada $\angle DBE = 20°$, o $\angle AEB = 90° - 20° = 70°$.

336. a) $x = 40°$, $y = z = 50°$; b) $x = 25°$, $y = z = 65°$; c) $x = 80°$, $y = 40°$, $z = 50°$.

337. 6 m.

338. a) 22; b) 6; c) 4.

339. 52 cm. Nereikalingas duomuo — 14 cm.

340. 4 cm.

341. 12 cm.

342. $60\,\text{cm}^2$. *Nurodymas.* Remkitės liestinių, išeinančių iš vieno taško, atkarpų savybe.

343. $240\,\text{cm}^2$.

344. a) $6\sqrt{3}$ cm; b) $6\sqrt{2}$ cm; c) 6 cm.

345. a) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm; b) 5 cm; c) $5\sqrt{3}$ cm.

346. a) $\frac{25\pi}{18} \approx 4{,}4$ cm; b) $\frac{1675\pi}{18} \approx 292\,\text{cm}^2$.

347. a) $\frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; b) $\frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$; c) $R^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.
Nurodymas. Nuspalvintos dalies plotas lygus: a) šeštadalio skritulio ir lygiašonio trikampio, kurio šoninių kraštinių ilgiai lygūs apskritimo spinduliui, o kampas tarp jų yra 120°, plotų sumai; b) ketvirtadalio skritulio ir stačiojo lygiašonio trikampio, kurio statinių ilgiai lygūs apskritimo spinduliui, plotų sumai; c) trečdalio skritulio ir lygiakraščio trikampio, kurio kraštinės ilgis lygus apskritimo spinduliui, plotų sumai.

348. $R^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$. *Nurodymas.* Nuspalvintos skritulio dalies plotas lygus pusės skritulio ir dviejų lygių lygiašonių stačiųjų trikampių, kurių statinių ilgiai lygūs skritulio spinduliui, plotų skirtumui.

349. 1) $\approx 11\,\text{cm}^2$; 2) $\approx 10{,}7\,\text{cm}^2$; 0,3.

5. Iškilieji daugiakampiai. Taisyklingieji daugiakampiai

Visi uždaviniai skirti pakartoti taisyklingiesiems daugiakampiams. Pirmiausia reikėtų prisiminti, kam lygus taisyklingojo n-kampio kiekvieno kampo didumas (350–352) ir tik po to spręsti uždavinius apie įbrėžtinių ir apibrėžtinių apskritimų spindulių bei taisyklingojo n-kampio kraštinės ilgių sąryšius (354–368).

350. a) 8; b) 12.

351. a) 10; b) 15.
Nurodymas. Jei taisyklingojo daugiakampio priekampis yra α, tai vidaus kampas lygus $180° - \alpha$.

352. a), b) — taip. *Nurodymas.* Galite paklausti mokinių, koks tai taisyklingasis daugiakampis. Abiem atvejais — dvylikakampis.

353. Keturias.

354. Tegul lygiakraščio trikampio kraštinės ilgis yra a. Tada $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.
Pagal sąlygą: $\frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{a\sqrt{3}}{6} = 48$, $a = 96\sqrt{3} \approx 166\,\text{mm}$.

355. $25\sqrt{2} \approx 35\,\text{cm}$, $25\,\text{cm}$.

356. $\approx 7{,}1\,\text{cm}$.

357. 56 mm.

358. a) $\approx 16{,}2\,\text{cm}$; b) $\approx 17{,}0\,\text{cm}$; c) $\approx 20{,}8\,\text{cm}$.

359. $P \approx 28{,}7\,\text{dm}$, $S \approx 59{,}4\,\text{dm}^2$. *Nurodymas.* Skritulio spindulys $R \approx 4{,}78\,\text{cm}$.

360. $\approx 15{,}3\,\text{cm}$, $\approx 122{,}4\,\text{cm}$, $\approx 1131{,}4\,\text{cm}^2$.

361. $P = 432\,\text{mm}$, $S \approx 8979\,\text{mm}^2$.

362. *Nurodymas.* Trikampio kraštinės ilgis $a = R\sqrt{3}$. Įsitikinkite, kad trijų „mėnuliukų“ plotų sumos ir trikampio ploto skirtumas lygus $\frac{3}{2}$ skritulio, kurio spindulys lygus $\frac{a}{2}$, ir duotojo skritulio plotų skirtumui.

363. a) $\approx 1442\,\text{mm}^2$; b) $\approx 1659\,\text{mm}^2$; c) $\approx 1938\,\text{mm}^2$; d) $\approx 1074\,\text{mm}^2$.
Pastaba. Paprastai brėžiniuose žymėjimas, pavyzdžiui, ∅38, reiškia, kad apskritimo skersmuo yra 38 ilgio vienetai. Vadovėlyje c) punkte pateiktame brėžinyje tai yra kvadrato įstrižainės ilgis.

364. 6. *Nurodymas.* Įsitikinkite, kad AB — lygiakraščio trikampio ABC kraštinė; čia C — viršūnė, iš kurios nubrėžtos stygos.

365. $2\sqrt{6}\,\text{dm}$.

366. 4 cm. *Nurodymas.* Sakykime, kad skritulio spindulys yra R. Tada apie šį skritulį apibrėžto taisyklingojo šešiakampio plotas lygus $2\sqrt{3}R^2$, o į šį skritulį įbrėžto taisyklingojo šešiakampio plotas lygus $\frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$.

367. a) $\frac{81\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}^2$; b) $108\,\text{cm}^2$; c) $81\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

368. a) $48\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. *Pastaba.* Sąlygoje yra korektūros klaida. Turėtų būti: „a) taisyklingojo trikampio plotą“;
b) $64\,\text{cm}^2$; c) $32\sqrt{3}\text{cm}^2$.

6. Briaunainiai

Prizmei pakartoti skirti 369–379 uždaviniai: 369 — kubas; 370 — taisyklingoji trikampė prizmė; 371, 378 — stačioji trikampė prizmė; 372–377 — stačiakampis gretasienis; 379 — stačiakampio gretasienio ir stačiosios trikampės prizmės darinys. Piramidei (taisyklingajai) pakartoti skirti 380–387 uždaviniai: 380 — šešiakampė piramidė; 381–384, 386b — keturkampė piramidė; 385, 386a, 387 — trikampė piramidė.

369. $216\,\text{cm}^3$.

370. 7 m.

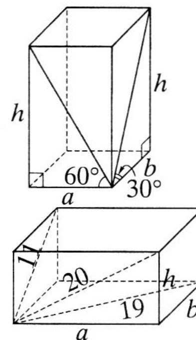
371. $V = 480\,\text{dm}^3$, $S_{\text{šon}} = 480\,\text{dm}^2$, $S_{\text{pav}} = 528\,\text{dm}^2$.

372. a) 60 cm; b) 15 cm.

373. $V = 4000\,\text{cm}^3$, $S_{\text{pav}} = 1600\,\text{cm}^2$.

374. a) 78 dm; b) $V = 55\,080\,\text{cm}^3$, $S_{\text{pav}} = 9198\,\text{cm}^2$.

375. a) $V = 1728\,\text{cm}^3$, $S_{\text{pav}} = 888\,\text{cm}^2$; b) $V = 6300\,\text{cm}^3$, $S_{\text{pav}} = 2070\,\text{cm}^2$.



376. $\frac{h}{a} = \operatorname{tg} 60°$, $h = \sqrt{3}a$; $\frac{h}{b} = \operatorname{tg} 30°$, $h = \frac{\sqrt{3}}{3}b$. Vadinasi, $\sqrt{3}a = \frac{\sqrt{3}}{3}b$ ir $b = 3a$. Pagal Pitagoro teoremą turime: $a^2 + (3a)^2 = (\sqrt{30})^2$, $a = \sqrt{3}$. Tada $b = 3\sqrt{3}$, $h = 3$, o $V = \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3 = 27\,(\text{cm}^3)$.

377. Iš stačiųjų trikampių remdamiesi Pitagoro teorema sudarykime lygčių sistemą:
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 19^2, \\ a^2 + h^2 = 20^2, \\ b^2 + h^2 = 11^2. \end{cases}$$
Sudėję šias tris lygtis panariui gausime: $2(a^2 + b^2 + h^2) = 19^2 + 20^2 + 11^2$, $a^2 + b^2 + h^2 = 441$ ir gretasienio įstrižainės ilgis yra $\sqrt{441} = 21$ (cm).

378. Sakykime, kad x ir y — pagrindo statinių ilgiai, o z — įžambinės ilgis; H — prizmės aukštinė. Tada $x^2 + y^2 = z^2$ ir
$$\begin{cases} H^2 = 9^2 - x^2 = 81 - x^2, \\ H^2 = (10\sqrt{2})^2 - y^2 = 200 - y^2, \\ H^2 = 15^2 - z^2 = 225 - z^2. \end{cases}$$
Sudėję panariui dvi pirmąsias lygybes, o trečiosios abi puses padauginę iš 2 gausime: $\begin{cases} 2H^2 = 281 - (x^2 + y^2), \\ 2H^2 = 450 - 2z^2. \end{cases}$

Į pirmąją lygtį vietoj $(x^2 + y^2)$ įrašę z^2 gausime: $\begin{cases} 2H^2 = 281 - z^2, \\ 2H^2 = 450 - 2z^2. \end{cases}$

Iš čia $281 - z^2 = 450 - 2z^2$, $z = 13$ cm. Tada $x = 5$ cm ir $y = 12$ cm.

379. a) $\approx 45\,\text{m}^2$; b) $\approx 28\,\text{m}^3$.

380. $540\sqrt{3}\,\text{dm}^3$.

381. 15 cm.

382. $V = 384\,\text{cm}^3$, $S_{\text{pav}} = 384\,\text{cm}^2$.

383. $S_{\text{šon}} = 2340\,\text{cm}^2$, $S_{\text{pav}} = 3240\,\text{cm}^2$, $V = 10\,800\,\text{cm}^3$.

384. $V = 384\,\text{dm}^3$, $S_{\text{pav}} = 384\,\text{dm}^2$. *Nurodymas.* Žinodami taisyklingosios keturkampės piramidės šoninės briaunos ilgį ir aukštinės ilgį pagal Pitagoro teoremą apskaičiuokite pagrindo pusės įstrižainės ilgį. Tada apskaičiavę pagrindo įstrižainės ilgį rasite ir pagrindo kraštinės ilgį.

385. $S_{\text{šon}} = 225\,\text{m}^2$, $S_{\text{pav}} = 25(\sqrt{3} + 9)\,\text{m}^2$.

386. a) *Pastaba.* Sąlygos paskutinis sakinys turėtų būti: „Raskite piramidės pagrindo kraštinės ilgį ir *piramidės* tūrį".

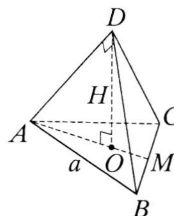
Atsakymas. 45 cm, $V = \frac{10\,125\sqrt{3}}{4}\,\text{cm}^3$.

Nurodymas. Remkitės statinio, esančio prieš 30° kampą, ir trikampio pusiaukraštinių savybėmis.

b) $\frac{1125\sqrt{6}}{2}\,\text{cm}^3$.

387. a) Kadangi $ABCD$ — taisyklingoji piramidė, tai $AD = DB$. Iš stačiojo $\triangle ADB$ remdamiesi Pitagoro teorema turime: $2AD^2 = a^2$, $AD^2 = \frac{a^2}{2}$. Kadangi AM — taisyklingojo $\triangle ABC$ pusiaukraštinė (kartu ir aukštinė), tai $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AO = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tada $H = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$, $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

b) $\frac{h^3\sqrt{3}}{2}$.



7. Sukiniai

Ritiniui pakartoti skirti 388–394, kūgiui — 395–399, rutuliui — 404–406, 407b uždaviniai. Kiti uždaviniai — tai erdvinių kūnų dariniai: kūgio ir ritinio (400–403), kubo ir rutulio (407a), kūgio ir rutulio (408).

388. a) 16π cm^2; b) 24π cm^2; c) 16π cm^3.

389. $\approx 4{,}4$ cm.

390. 5 cm.

391. 2 : 1. *Nurodymas.* Ritinio, kurio aukštis yra 0,8 m, o pagrindo apskritimo ilgis 1,6 m, tūris lygus $\frac{0{,}512}{\pi}$ m^3. Ritinio, kurio aukštis yra 1,6 m, o pagrindo apskritimo ilgis 0,8 m, tūris lygus $\frac{0{,}256}{\pi}$ m^3.

392. $S_{pav} = 112{,}5\pi$ cm^2, $V = 162\pi$ cm^3.

393. a) 62 800 ℓ, 45 216 kg; b) 1513,323 t.

394. a) $20\sqrt{2} \approx 28{,}3$ cm; b) 57 m^3.

395. a) 24π cm^2; b) 12π cm^3.

396. 6 cm.

397. 8,84 kg.

398. $S_{pav} = 75\pi$ cm^2, $V = \frac{125\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3.

399. $\approx 28{,}7$ t.

400. 48.

401. $\approx 1648{,}5$ kg. *Nurodymas.* $\rho = 0{,}03 \text{g/cm}^3 = 30 \text{kg/m}^3$.

402. 27,648%. *Nurodymas.* Raskite vandens aukštį ritinio formos inde.

403. 120°. *Nurodymas.* Jeigu R — pagrindo spindulys, H — aukštinė, α — kūgio ašinio pjūvio kampas prie viršūnės, tai $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{H}$.

404. 3 dm.

405. *Pastaba.* Sąlygoje yra korektūros klaida. Turi būti: „... Atsakymą parašykite 1 <u>cm^3</u> tikslumu“.
Atsakymas. 314 cm^3.

406. a) 9π cm^2; b) $\approx 706{,}5$ dm^2;
c) *Pastaba.* Sąlygoje yra korektūros klaida. Turėtų būti: „... plotas lygus 28,26 <u>cm^2</u>“.
Atsakymas. $2\sqrt{3}$ cm.

407. a) Kubo; b) 1000.

408. $2\sqrt{2}$ cm.

Vadovėlio gale esančios užduotys skirtos mokiniams pasitikrinti, kaip jie įsisavino pagrindinės mokyklos matematikos kursą. Tas užduotis rekomenduojama spręsti 2 pamokas. Užduotys sudėtos sunkėjimo tvarka — nuo lengviausios iki sunkiausios. Pateikiame jų atsakymus.

1 užduotis

1. a) $-\frac{11}{70}$; b) $\frac{3}{50}$; c) $-\frac{3}{4}$.

2. a) $>$; b) $>$; c) $<$; d) $>$; e) $=$.

3. a) 0,5; b) 200.

4. a) 0,05; b) $\approx 0{,}0037$; c) $\approx 0{,}37\%$.

5. a)

X	1	2	3	4
Y	3	6	9	12

b) ne.

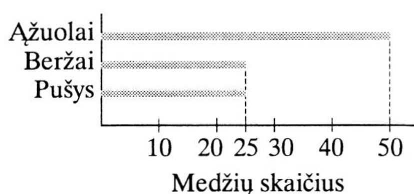
6. a) $9(a-2)$; b) $\frac{a+5}{a-5}$; c) $\frac{x+3}{x-3}$.

7. a) 5; b) 0; 3; c) 5; d) 1; 2; e) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$.

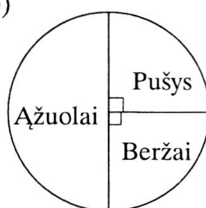
8. a) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$; b) $[0; 4]$.

9. a) $(-1; -2)$; b) $(1; 1{,}25]$.

10. a)



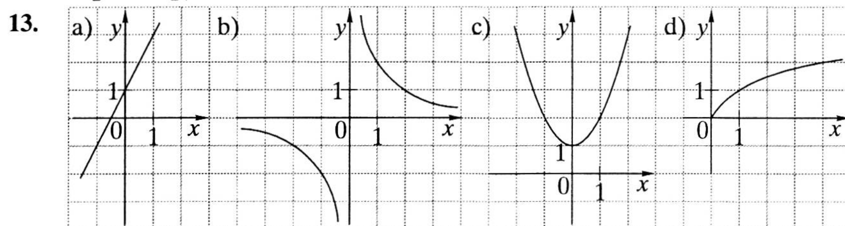
b)



11. a) 6; b) 27.

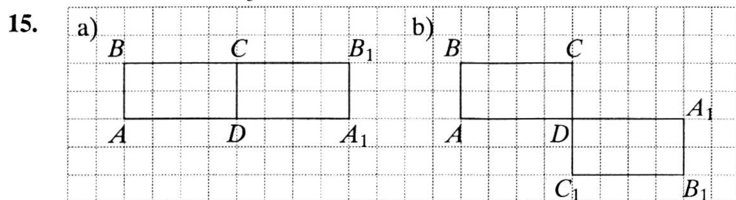
12. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{24}$; c) abu įvykiai vienodai tikėtini.

13.



14. a) 5 km/h; b) $66\frac{2}{3}$ m/min; c) 4,8 km/h.

15.



c) Figūros $ABCD$ simetrijos centras — įstrižainių AC ir BD susikirtimo taškas;

d) figūros $ABCD$ simetrijos ašys — tiesės, einančios per priešingų kraštinių vidurio taškus.

16. a) 12, $P = 30$, $S = 30$; b) 6, $6\sqrt{3}$, $P = 18 + 6\sqrt{3}$, $S = 18\sqrt{3}$; c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $P = 3 + 3\sqrt{2}$, $S = 2{,}25$.

17. a) $4\,\text{cm}^2$; b) 20; c) $2\sqrt{3}$.

18. a) 1 cm; b) $100\pi \approx 314\,\text{mm}^2$.

19. a) $6\,\text{m}^2$, $1\,\text{m}^3$; b) $3400\,\text{cm}^2$, $10\,000\,\text{cm}^3$; c) $9\sqrt{3}\,\text{cm}^2$, $\frac{9\sqrt{2}}{4}\,\text{cm}^3$; d) $25\pi(\sqrt{5}+1)\,\text{cm}^2$, $\frac{250}{3}\pi\,\text{cm}^3$; e) $24\pi\,\text{m}^2$, $16\pi\,\text{m}^3$; f) $4\pi\,\text{cm}^2$, $\frac{4}{3}\pi\,\text{cm}^3$.

20. Per dieną Nijolė suvalgo 5 saldainius, o Antanas — 4 pyragėlius.

21. **B**, **C** — lyginės; **A**, **D**, **E** — nelyginės; **F** — nėra nei lyginės, nei nelyginės.

2 užduotis

1. a) $1\frac{7}{12}$; b) 2,5; c) -7.

2. a) $a^2 - 8a + 1$; b) $13\sqrt{5} - 12\sqrt{3}$; c) b^9.

3. $\frac{1}{3}$.

4. 15%.

5. 1200 km/h.

6. (0; 5).

7. $P = 32$, $S = 48$.

8. 120 ℓ.

9. $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{6}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{3}$, $\mathbf{P}(C) = \frac{1}{2}$.

10. 15.

11. [8; 10).

12. $\approx 3{,}19$ m.

13. a) $2\sqrt{17}$; b) $(-1; 3)$; c) atkarpos, simetriškos atkarpai AB abscisių ašies atžvilgiu, koordinatės yra $A_1(-5; -2)$ ir $B_1(3; -4)$; d) atkarpos, simetriškos atkarpai AB koordinačių pradžios taško atžvilgiu, koordinatės yra $A_2(5; -2)$ ir $B_2(-3; -4)$.
Pastaba. Reikėtų dar papildomai pridėti 1 tašką už teisingą atkarpos AB nubrėžimą.

14. a) -4; b) intervale $(-\infty; 0)$ funkcija mažėja; intervale $(0; +\infty)$ funkcija didėja; c) kai $x < -2$ ir $x > 2$, tai funkcija įgyja teigiamas reikšmes; kai $-2 < x < 2$, tai funkcija įgyja neigiamas reikšmes; d) $x \approx -1{,}2$ ir $x \approx 3{,}2$.
Pastaba. Reikėtų dar papildomai pridėti 2 taškus už teisingą grafiko nubrėžimą.

15. a) Parduotuvėje A apsilankė 135, o parduotuvėje B — 165 pirkėjai; b) 22,5; c) $\approx 24{,}2\%$.

16. Langeliuose surašyti skaičiai yra iš eilės einančių natūraliųjų skaičių kvadratai.

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

3 užduotis

1. a) $-\frac{2}{3}$; b) $1\frac{2}{3}$.

2. $3\sqrt{2}$.

3. a) 40; b) 4; c) 36; d) 15%.

4. 1) 9,6 Lt; 2) po 12 Lt pirkta 16 bilietų, o su nuolaida 9 bilietai.

5. Sakykime, kad grynas aliejus sveria x kg. Tada statinė sveria $0{,}05x$ kg. Pagal sąlygą: $x + 0{,}05x = 193{,}2$; $x = 184$ kg.
Vadinasi, statinėje yra $\frac{184}{920} = 0{,}2\,\text{m}^3 = 200\,\text{dm}^3 = 200$ ℓ aliejaus.
Sakykime, kad pradinė aliejaus kaina yra a Lt.
Pagal sąlygą: $200a \cdot 1{,}45 = 1160$, $a = 4$ Lt.
Atsakymas. 4 Lt.

6. a) 230 km; b) 115 km/h.

7. $S(x) = 10x - x^2$. Gėlyno plotas didžiausias, kai $x = 5$.

8. a) 60 cm; b) 150 cm^2; c) 12,5 cm; d) 5 cm; e) 12 cm.

9. ≈ 720 dm.

10. a) $\frac{500\sqrt{2}}{3}$ dm^3; b) $100\sqrt{3}$ dm^2.

11. a) 12 cm; b) ≈ 314 cm^3; c) 12.

4 užduotis

1. a) $\frac{12}{35}$; b) -7; c) $1\frac{1}{5}$.
2. 20.
3. 2; 1.
4. a) 12; b) $\approx 7{,}3$.
5. $88°$.
6. $8\sqrt{5}$.
7. 30% stačiakampio yra 12 langelių.
8. 16.
9. $x = 0$.
10. 10.
11. $5000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 5\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.
12. $[-3; 3]$.
13. Kadangi iš viso sode auga $18 + 12 + 10 = 40$ (vaiskrūmių), tai skritulinės diagramos centrinis kampas, atitinkantis 18 vaiskrūmių, yra $\frac{18 \cdot 360°}{40} = 162°$, 12 vaiskrūmių — $108°$, 10 vaiskrūmių — $90°$.
14. 4.
15. 4 kg.
16. 7,5 Lt.
17. 20 km/h.
18. $\approx 37°$.
19. a) 25; b) $15 + 5\sqrt{5} \approx 26{,}18$.
20. $S = 30\,\text{cm}^2$, $P = 26\,\text{cm}$.
21. $V = 16\pi\,\text{dm}^3$, $S_{\text{pav}} = 36\pi\,\text{dm}^2$.
22. a) $m = \frac{b-y}{2}$; b) $S_1 = (a+y)(a-x)$; c) $S_2 = (a-2m)(b-2m)$.
23. $\frac{1}{6}$.
24. 88,56 Lt.
25. 80; 2 Lt 80 ct. *Nurodymas*. Reiškinį $2x^2 - 320x + 13\,080$ parašykite dvinario kvadratu.

5 užduotis

1. 3600.
2. $\text{MBK}(105; 280) = 840$.
3. Pavyzdžiui, $3\frac{17}{144}$.
4. $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, tai $b = \frac{3a}{2}$; $\frac{a}{c} = \frac{1}{2}$, tai $c = 2a$. Tada $\frac{b}{c} = \frac{\frac{3a}{2}}{2a} = \frac{3}{4}$.
5. Kadangi 17% skaičiaus n yra 8,5, tai skaičius $n = \frac{8{,}5 \cdot 100}{17} = 50$. Tada 50% skaičiaus 17 yra $\frac{17 \cdot 50}{100} = 8{,}5$.
6. Su nuolaida buvo parduota 15, o už visą kainą — 10 bilietų.
7. Kadangi automobilis $\frac{3}{5}$ kelio važiavo 60 km/h greičiu, tai $\frac{2}{5}$ kelio važiavo $60 + 20 = 80$ (km/h) greičiu. Sakykime, kad visas kelias yra s km. Tada $\frac{3}{5}$ kelio automobilis važiavo $\frac{3}{5}s : 60 = 0{,}01s$ (h), o $\frac{2}{5}$ kelio važiavo $\frac{2}{5}s : 80 = 0{,}005s$ (h). Visą kelią automobilis nuvažiavo per $0{,}01s + 0{,}005s = 0{,}015s$ (h). Tada automobilio vidutinis greitis yra $\frac{s}{0{,}015s} = 66\frac{2}{3}$ (km/h).
8. $5 < \sqrt{27} < 6$. Kadangi $4 < \sqrt{20} < 5$ ir $2 < \sqrt{7} < 3$, tai $6 < \sqrt{20} + \sqrt{7} < 8$. Taigi $\sqrt{27} < \sqrt{20} + \sqrt{7}$.
9. $\sqrt{9 - 6a + a^2} = \sqrt{(3-a)^2}$. Kadangi $a > 3$, tai $\sqrt{(3-a)^2} = -(3-a) = a - 3$.

10. $6x^2 - 31x + 35$; $47 - 31\sqrt{2}$.

11. $a = 4$.

12. $-y^2 + 2y - 5 = -(y^2 - 2y + 5) = -((y-1)^2 + 4) = -(y-1)^2 - 4 < 0$ su visomis y reikšmėmis.

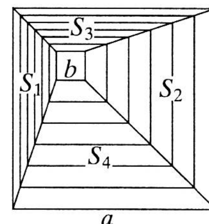
13. a) Taip; b) $\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$; c) funkcijos $f(x) = 4x - 4$ grafikas — tiesė, kertanti x ašį taške, kurio koordinatės yra $(1; 0)$, ir y ašį taške, kurio koordinatės yra $(0; -4)$.

14. $MN^2 = 400$, $NK^2 = 225$, $MK^2 = 625$. Kadangi $MK^2 = MN^2 + NK^2$, tai $\triangle MNK$ — statusis.

15. b) Kai $y = 3$, tai $-\frac{4}{9}x^2 + 4 = 3$, $x = 1{,}5$. Arkos plotis bus $2 \cdot 1{,}5 = 3$ (m).
c) Kai $x = \frac{4}{2} = 2$, tai $y = -\frac{4}{9} \cdot 2^2 + 4 = 2\frac{2}{9}$. Taigi pro šiuos vartus furgonas įvažiuoti gali.

16. *I būdas.* Pakviesti du mokinius iš 25 galima $\frac{25 \cdot 24}{2 \cdot 1} = 300$ skirtingų būdų. Pakviesti berniuką ir mergaitę galima $13 \cdot 12 = 156$ skirtingais būdais. Taigi $\mathbf{P}$(pakviesti yra berniukas ir mergaitė) $= \frac{156}{300} = \frac{13}{25}$.
II būdas. $\mathbf{P}$(pakviesti berniuką arba mergaitę) $= \frac{13}{25} \cdot \frac{12}{24} + \frac{12}{25} \cdot \frac{13}{24} = \frac{13}{25}$.
III būdas. A — pakviesti berniuką arba mergaitę, $\overline{A}$ — pakviesti dvi mergaites arba du berniukus.
$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{13}{25} \cdot \frac{12}{24} + \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24}\right) = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25}$.

17. $S_1 + S_2 = \frac{a+b}{2} \cdot h_1 + \frac{a+b}{2} \cdot h_2 = \frac{a+b}{2}(h_1 + h_2)$, čia h_1 ir h_2 — trapecijų aukštinės; $h_1 + h_2 = a - b$, tai $S_1 + S_2 = \frac{a+b}{2}(a - b) = \frac{a^2-b^2}{2}$. Analogiškai $S_3 + S_4 = \frac{a+b}{2} \cdot h_3 + \frac{a+b}{2} \cdot h_4 = \frac{a+b}{2}(h_3 + h_4)$; $h_3 + h_4 = a - b$, tai $S_3 + S_4 = \frac{a+b}{2}(a - b) = \frac{a^2-b^2}{2}$. Taigi $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$.



18. $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = 2x + 5$.



Ši knyga skiriama mokytojui, dėstančiam matematiką 10 klasėje ir naudojančiam vadovėlį „Matematika 10, I ir II dalys“ bei atitinkamą uždavinyną. Ją sudaro įvadas ir pagrindinė dalis.

Įvadinėje dalyje pateikti:
1. Matematikos bendroji programa V–Xklasėms;
2. Vadovėlio „Matematika 10“ turinys nurodant rekomenduojamą minimalų pamokų skaičių temai nagrinėti.

Pagrindinė knygos dalis atitinka vadovėlį „Matematika 10“. Skyrių ir skyrelių pavadinimai tie patys, kaip ir vadovėlio, jų medžiaga pateikiama pagal vieningą schemą. Kiekviename skyriuje (ar jo skyreliuose):

- analizuojama teorinė medžiaga, išskiriant pagrindinius, svarbiausius dalykus;
- primenama, ko buvo mokoma anksčiau (***Pakartoti***), nurodoma, ko reikėtų mokyti einamuoju momentu (***Išmokti***), ir pateikiama skyrelio teorinės dalies santrauka su paaiškinimais (***Šiame skyrelyje***);
- pateikiami metodiniai-praktiniai nurodymai mokytojui;
- pateikiami sunkesnių uždavinių sprendimai ir visų uždavinių atsakymai (PRATIMAI IR UŽDAVINIAI). Dešinėje kolonėlėje pažymėti rekomenduojami uždavinyno uždaviniai. Taip pat ten rašomos įvairios pastabos apie atskirus pratimus ir uždavinius.

Kiekvieno skyriaus teorinės medžiagos analizės pabaigoje pateikiami tame skyriuje vadovėlio autorių keliami tikslai mokinių žinioms, suskirstant juos lygmenimis: ***minimaliuoju***, ***pagrindiniu*** ir ***išplėstiniu***.

ISBN 9955-491-26-4

